

БИБЛИОТЕКА  
ИНЖЕНЕРА –  
ГИДРОАКУСТИКА

В. Е. Глазанов

**ЭКРАНИРОВАНИЕ  
ГИДРО-  
АКУСТИЧЕСКИХ  
АНТЕНН**

СУДОСТРОЕНИЕ





БИБЛИОТЕКА  
ИНЖЕНЕРА —  
ГИДРОАКУСТИКА

В. Е. Глазанов

# ЭКРАНИРОВАНИЕ ГИДРО- АКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН



Ленинград  
Судостроение  
1986

ББК 32.875  
Г52  
УДК 681.883.67

СЕРИЯ  
„БИБЛИОТЕКА  
ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА”

---

Редакционная коллегия:

В. И. БАБИЙ, А. П. ЕВТЮТОВ,  
А. Е. КОЛЕСНИКОВ, Е. А. КОРЕПИН,  
А. П. ЛЯЛИКОВ, В. Ф. МАРТЫНЮК,  
В. В. ОЛЬШЕВСКИЙ, Л. В. ОРЛОВ,  
А. Л. ПРОСТАКОВ, В. А. САПРЫКИН,  
Г. М. СВЕРДЛИН, А. Д. СТАРКОВ,  
Ю. Ф. ТАРАСЮК (ответственный редактор),  
В. И. ТИМОШЕНКО

Рецензенты:

докт. техн. наук  
Е. Л. ШЕНДЕРОВ,  
докт. техн. наук  
М. Д. СМАРЬШЕВ

Глазанов В. Е.

Г52 Экранирование гидроакустических антенн. — Л.: Судостроение,  
1986. — 148 с. (Библиотека инженера-гидроакустика).  
ИСБН

Развита теория и проведен анализ акустических свойств однослойных и многослойных систем в воде, а также радиально возбуждаемых упругих цилиндров. Разработаны методы расчета акустических и упругих параметров применяемых в звукоотражающих и поглощающих экранах податливых сред с полостями. Рассмотрены характеристики антенн и преобразователей, зависящие от свойств экранов и методов экранирования.

Книга рассчитана на инженерно-технических и научных работников, занимающихся разработкой гидроакустических преобразователей и антенн и другими вопросами, связанными со звукоизоляцией в воде. Она может оказаться полезной специалистам смежных областей, интересующихся проблемами звукоизоляции на судах, в летательных аппаратах и в строительстве, а также студентам высших учебных заведений и аспирантам, изучающим акустику.

Г  $\frac{3605030000-010}{048(01)-86}$  47-86

32.875

© Издательство „Судостроение”, 1986 г.

В последние годы появился ряд отечественных работ, посвященных расчету гидроакустических преобразователей и антенн. К ним относятся книги М. Д. Смаришева [115], Л. В. Орлова и А. А. Шаброва [93], Г. М. Свердлина [108, 109]. В этих работах практически отсутствуют сведения об акустических экранах, которые являются важной составной частью указанных устройств и применяются для формирования характеристик направленности, повышения помехозащищенности приемников и увеличения эффективности излучателей. Для рассмотрения влияния экранов на указанные параметры требуется получить соотношения, которые позволят рассчитать и исследовать акустические характеристики преобразователей и антенн в зависимости от способов их экранирования и свойств экранов.

В научно-техническом аспекте проблема экранирования гидроакустических преобразователей родственна задаче создания экранов для электроакустических преобразователей, применяемых в ультразвуковой и ультраакустической технике. Наряду с этим, она примыкает к проблеме звукоизоляции в широком смысле и, в частности, в воде. Специфические особенности, возникающие при экранировании звука в воде, такие как: сравнимость с толщиной слоя длины упругой волны, распространяющейся в материалах, применяемых для экранов; податливость экранирующих материалов под действием гидростатического давления и т. п. — также обуславливают необходимость рассмотрения вопросов экранирования в качестве самостоятельной проблемы. Требуется разработать методы расчета акустических и упругих параметров сред, применяемых в акустических экранах. При определении звукоизоляции эти параметры имеют первостепенное значение, поскольку экранирующее действие слоев в воде при прочих равных условиях зависит от того, насколько волновое сопротивление материала отличается от волнового сопротивления воды. Теория распространения звука в слоях наиболее полно освещена в монографии Л. М. Бреховских [14], и при описании плоских слоистых систем автор широко использует результаты этой работы.

В отечественной и, насколько нам известно, в зарубежной литературе нет книг, посвященных вопросам экранирования гидроакустических преобразователей и антенн и в этой связи — свойствам податливых сред и их поведению под давлением. Большое количество весьма полезных результатов содержится в журнальных статьях, периодических сборниках и патентах. Таким образом, возникает необходимость систематического изложения основных проблем, связанных с экранированием гидроакустических антенн и преобразователей. Решение этой задачи является целью настоящей книги.

В книге рассчитываются и анализируются акустические характеристики экранов и освещаются вопросы теории экранирования антенн и преобразователей. Большое внимание уделено методам расчета упругих параметров применяемых в экранах сред с полостями — пористых резин и резин с цилиндрическими каналами, в том числе при высоких гидростатических давлениях. Приводятся методы расчета характеристик антенн из стержневых и цилиндрических преобразователей, зависящих от свойств экранов и методов экранирования. Полученные в книге соотношения иллюстрируются графическим материалом, которым можно пользоваться как справочным, удобным для расчета акустических характеристик экранов и экранированных антенн и преобразователей.

Многие результаты, которые помещены в книге, принадлежат автору. Основой для написания книги послужил курс лекций [33], прочитанный для аспирантов и студентов старших курсов Таганрогского радиотехнического института. Ряд результатов других авторов переработан таким образом, чтобы представленные вопросы излагались с единой точки зрения и ими можно было более удобно пользоваться в практических случаях.

Программирование задач и расчеты на ЭВМ проведены А. В. Михайловым, Т. Б. Громовой, А. А. Сербиной, С. А. Мостовой, Е. П. Шуршиной и Д. В. Глазановым, за что автор выражает им сердечную признательность. Вторая половина § 12 написана по просьбе автора А. В. Михайловым.

С благодарностью будут приняты все замечания и пожелания, которые возникнут при чтении книги. Отзывы направлять по адресу: 191065, Ленинград, ул. Гоголя, д. 8, издательство „Судостроение“.

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $a$  — радиус цилиндрической полости, трубки; внутренний радиус цилиндра, сферической оболочки  
 $b$  — расстояние между цилиндрами; внешний радиус цилиндра, сферической оболочки  
 $c$  — скорость звука  
 $\bar{c}$  — усредненная или эффективная скорость звука  
 $\bar{c}$  — комплексная скорость  
 $c_l$  — скорость продольной волны в безграничной среде  
 $c_t$  — скорость сдвиговой волны в безграничной среде  
 $c_L$  — скорость в тонкой пластинке  
 $c_E$  — скорость юнговских волн в стержне  
 $D_{эф}$  — продольный модуль упругости  
 $\bar{d}$  — толщина слоя; смещение стенки трубки  
 $E$  — модуль Юнга  
 $E(\ )$  — модуль упругости характерного элемента среды с полостями  
 $e$  — основание натурального логарифма  
 $f(a)$  — функция, определяющая потери в слое  
 $f(z)$  — функция смещения вдоль оси в цилиндрической трубке  
 $F, f_1, f_2$  — частоты колебаний; сила  
 $H_n$  — функция Ханкеля  
 $h$  — высота цилиндра, трубки  
 $J_n$  — функция Бесселя  
 $i$  — мнимая единица  
 $K$  — объемный модуль упругости; упругость слоя  
 $k$  — волновое число  
 $\tilde{k}$  — усредненное или эффективное волновое число  
 $\bar{k}$  — комплексное волновое число  
 $k_l$  — волновое число для продольных волн  
 $k_t$  — волновое число для сдвиговых волн  
 $l$  — толщина слоя  
 $M$  — масса пластины, слоя  
 $m$  — относительное волновое сопротивление; индекс суммирования  
 $N$  — число цилиндров в решетке  
 $N_n$  — функция Неймана  
 $P$  — статическое давление  
 $p$  — звуковое давление  
 $p_r$  — давление в отраженной волне  
 $p_t$  — давление в прошедшей волне; давление, рассеянное цилиндром с номером  $t$   
 $Q_K$  — добротность пьезокерамики  
 $R$  — активная составляющая импеданса  
 $R(a)$  — характеристика направленности  
 $R_{1, 2}, R_r, R_s, R_p, R_q$  — текущие радиусы  
 $Re, Im$  — вещественная и мнимая составляющие импеданса

$r$  – коэффициент отражения  
 $r, \theta, z$  – цилиндрические координаты  
 $S$  – площадь  
 $T$  – кинетическая энергия; отношение давлений  
 $t$  – коэффициент прохождения; время; индекс суммирования  
 $U_n, V_n$  – составляющие функции Бесселя от комплексного аргумента  
 $u, \dot{u}$  – радиальные смещение, скорость  
 $V$  – объем  
 $v$  – колебательная скорость  
 $W$  – мощность  
 $w, \dot{w}$  – аксиальные смещение, скорость  
 $X$  – реактивная составляющая импеданса  
 $Y$  – проводимость  
 $x, y, z$  – декартовы координаты  
 $Z$  – импеданс; цилиндрическая функция  
 $a$  – коэффициент затухания; угол  
 $\beta$  – фазовый коэффициент; волновое число  
 $\beta_{ж}$  – коэффициент жесткости трубки  
 $\Gamma$  – относительная чувствительность  
 $\gamma$  – постоянная распространения  
 $\Delta$  – дилатация; оператор Лапласа; расстояние между осями цилиндров  
 $\Delta h, \Delta V$  – изменение высоты; изменение объема  
 $\delta$  – относительная деформация; угол  
 $\epsilon^n = a/b; a^2/b^2; a^3/b^3$  – коэффициент концентрации полостей: коэффициент перфорации  
 $\epsilon_x, \epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_r, \epsilon_{r\theta}, \epsilon_{z\theta}$  – относительные деформации в декартовой и цилиндрической системах координат  
 $\eta_E$  – коэффициент потерь модуля Юнга  
 $\eta_c$  – коэффициент потерь по скорости  
 $\eta_{ам}$  – акустико-механический КПД преобразователя  
 $\theta$  – угол  
 $\kappa$  – отношение давлений  
 $\Lambda$  – длина волны  
 $\lambda$  – первая постоянная Ламе  
 $\mu$  – вторая постоянная Ламе, модуль сдвига  
 $\nu$  – коэффициент Пуассона  
 $\xi_s, \xi_m$  – коэффициент площади; коэффициент массы  
 $\Pi$  – потенциальная энергия  
 $\Pi_r, \Pi_y$  – коэффициенты передачи давления и скорости  
 $\Pi, \Pi_z$  – векторный потенциал и его  $z$ -составляющая  
 $\rho$  – плотность  
 $\rho_c$  – волновое сопротивление материала  
 $(\rho_c)_B$  – волновое сопротивление воды  
 $\sigma_B$  – тыльный лепесток  
 $\sigma_T$  – составляющие напряжений в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат  
 $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$   
 $\tau_{r\theta}, \tau_{rz}$  – тангенциальные напряжения в цилиндрической системе координат  
 $\Phi$  – потенциал скорости; скалярный потенциал  
 $\varphi$  – фаза коэффициента отражения  
 $\psi$  – угол; фазовый угол; форма колебаний пластины  
 $\Omega$  – коэффициент концентрации  
 $\omega$  – круговая частота

$\omega_\theta$  – компонента вектора вращения в цилиндрической системе координат  
 $A, B, C, D, E, F, G, H,$  – постоянные  
 $L, X, Y, Q, N$   
 $m, n, p, q, s, t$  – индексы, в том числе суммирования

Индексы: ак – акустический; б – боковой поверхности; в – воды; вх – входной; ж – жесткости; к – керамики; кас – касательный; лин – линейный; м – механический; м.п – механических потерь; ам – акустико-механический; н – нагрузки; сл – слоя; ср – средняя, усредненная; сф – сферы; т – торца; тыльный; тр – трубки; э – экрана; эл – электрическая; эф – эффективный.



Гидроакустическая антенна, представляющая собой отдельный гидроакустический преобразователь или набор из преобразователей, обладает определенными направленными свойствами. Направленность антенны зависит от ее формы, волнового размера и конструктивных особенностей, (а также от ряда других факторов, таких как способы обработки сигналов, компенсации и т. п., которые выходят за рамки обсуждаемых в книге проблем и в дальнейшем не рассматриваются).

Для обеспечения преимущественного излучения (или приема) звука в определенном заданном направлении гидроакустические преобразователи и антенны обычно экранируют. В зависимости от типа антенны акустический экран служит либо основным, либо вспомогательным средством создания требуемой направленности. В рефлекторных и рупорных антеннах экран является неотъемлемой частью антенны, поскольку по самому принципу действия эти антенны не могут нормально функционировать без рефлектора или образующих рупор отражающих поверхностей. Антенна, выполненная, например, из набора симметричных стержневых преобразователей, будет излучать звук в двух противоположных стороны (или принимать звук обеими поверхностями). Установка экрана превращает такую антенну в одностороннюю. В антеннах, состоящих из цилиндрических преобразователей, экраны наряду с обеспечением направленности, служат для уменьшения взаимодействия между цилиндрами [93]. В зависимости от функционального назначения антенны экраны выполняют свои специфические функции. В приемных антеннах акустический экран повышает их помехозащищенность [115]. В антеннах, работающих в режиме излучения, экран концентрирует энергию в заданном телесном угле, обеспечивая рост давления на оси характеристики направленности и уменьшая ее тыльный лепесток.

Чаще всего акустическим экраном служит слой или система слоев, выполненные из материалов с отличным от воды волновым сопротивлением  $\rho c$ , которые обладают звукоизолирующими свойствами. Однако только звукоизоляцией функции экрана не исчерпываются. В случае излучающей антенны экран должен обладать также малым входным импедансом, а при экранировании внутренней полости цилиндрического преобразователя — уменьшать трансформацию радиальных колебаний внутренней поверхности цилиндра в продольные колебания вдоль оси полости. Чувствительность приемных антенн существенным образом зависит от того, является ли экран поглощающим, т. е. согласованным по входному импедансу с волновым сопротивлением воды, или

отражающим, причем в последнем случае важно также местоположение приемника относительно экрана.

Таким образом, экранирование гидроакустических преобразователей и антенн в качестве самостоятельного предмета для изучения включает в себя как собственно акустические свойства экранов, так и вопросы их влияния на характеристики антенн и преобразователей.

Исторически проблема экранирования возникла уже при построении первого подводного преобразователя Ланжевена—Шиловского [163] в связи с необходимостью создания однонаправленного излучения и приема звука. Экраном служит воздух, заключенный в герметичном корпусе преобразователя. Вообще говоря, воздух в воде является идеальным экраном: при атмосферном давлении его волновое сопротивление  $\rho c$  в 3500 раз меньше, чем у воды. С увеличением давления  $\rho c$  воздуха пропорционально увеличивается, и, например, при давлении 35 МПа (350 ат)  $\rho c$  отличается от  $(\rho c)_{\text{воды}}$  только в 10 раз. Такого отличия было бы достаточно для эффективного экранирования. Однако чтобы создать воздушный экран, необходимо заключить воздух в какую-либо герметичную оболочку. Применение прочных и слабо деформирующихся под давлением конструкций (контейнеров [95, 170]) сводит на нет все его полезные свойства вследствие высокой звукопроводности упрочняющих контейнер перегородок. Наилучшее использование отражающих способностей воздуха достигается при построении экранов из податливых или эластичных оболочек [165, 166, 170]. Из естественных твердых сред с малым  $\rho c$  можно назвать пробку, бальзовое дерево, войлок [8, 13, 154, 172], которые существенно изменяют параметры с давлением и уже на глубине 100–150 м неэффективны. Монолитные синтетические материалы (резины, пластмассы) обладают волновым сопротивлением  $\rho c \geq (\rho c)_{\text{в}}$ . Можно снизить их  $\rho c$ , введя в эти среды газовые полости. В жестких пластмассах (пенопластах) это приводит чаще всего только к уменьшению плотности [39, 96]. Создание полостей в резине, у которой модуль сдвига на два порядка меньше модуля объемного сжатия [86, 98, 121], позволяет путем преобразования объемных деформаций в сдвиговые значительно увеличить динамическую сжимаемость резины, что приводит, наряду с уменьшением плотности, к снижению в ней скорости звука. Чем выше концентрация полостей, тем акустически мягче среда. Статические деформации резины с полостями, возникающие под действием гидростатического давления, с ростом ее сжимаемости увеличиваются. Наиболее простым звукоотражающим материалом является пористая резина [164, 181, 182], представляющая собой среду с произвольно расположенными и изолированными друг от друга полостями малого диаметра (не более 2–3 мм). Однако эта резина сохраняет свои экранирующие свойства при гидростатических давлениях до 1 МПа [96]. Повысить предельное рабочее давление экрана можно путем увеличения статического модуля сдвига резины-основы. Это приводит, с одной стороны, к уменьшению деформируемости среды, но — с другой стороны — к росту скорости звука. Поэтому идут по пути выбора более устойчивой к давлению формы полости. Оптимальными в этом смысле являются цилиндрические каналы, образующие в слое

резины плотную „упаковку” типа гексагональных ячеек [68, 123]. Для того чтобы экран из резины с цилиндрическими каналами мог работать в воде, полости необходимо загерметизировать. Наиболее простым способом является герметизация при помощи тонких монолитных резиновых пластин [178]. Под действием гидростатического давления у таких экранов происходит деформация как самого слоя резины, так и герметизирующих пластин, в результате чего уменьшается концентрация полостей в резине и, как следствие этого, падает эффективность экрана. Замена резиновых накладок пластинами из более жесткого материала (металла или стеклопластика [68, 178]) увеличивает пьезостабильность резины с цилиндрическими каналами до давлений 4,0 МПа [93, 96, 109].

Известен и целый ряд экранирующих материалов с малым  $\rho c$ , таких как пробконополненная резина (корпрен) [8, 13, 154], сонит [152], пачки бумаги [140, 151, 153] и других [155, 157, 162, 167, 168, 171]. Хорошими звукоизолирующими и отражающими свойствами обладают слои из монолитных металлов [93, 169], которые целесообразно применять в области частот выше 10 кГц. На более низких частотах масса таких экранов становится недопустимо велика.

Круг вопросов, затрагиваемых в настоящей книге, касается ряда теоретических аспектов, имеющих приложение к расчету акустических экранов и экранированных преобразователей и антенн. К ним относятся методы расчета плоских слоистых и цилиндрических экранов; методы расчета акустических и упругих параметров применяемых в экранах сред с полостями; основы теории и расчет акустических характеристик экранированных антенн и преобразователей.

В американской литературе принята классификация так называемых вспомогательных материалов, к которым относятся акустические окна, отражатели, экраны и поглощающие покрытия. Согласно работе [13], идеальные образцы этих материалов должны обладать следующими характеристиками: окна — пропускать 100%, отражатели — отражать 100%, экраны — передавать 0%, поглотители — отражать 0% падающего на них звука. Однако последние три категории материалов могут быть названы единым термином „экраны”, поскольку отражатели, отражая 100% звуковой энергии, передают 0%, а поглотители, отражая 0% за счет поглощения энергии внутри слоя также могут передавать 0%. Поэтому в настоящей книге принят общий термин „экраны”, которые могут быть отражающими или поглощающими и всегда обладают конечной прозрачностью и неидеальным отражением или поглощением.

Экранирование гидроакустических преобразователей антенн осуществляется звукоотражающими или поглощающими средами, ограниченными по толщине. Акустические параметры таких слоистых сред: входной импеданс, коэффициент отражения, звукоизоляция и другие — характеризуют их экранирующий эффект. С другой стороны, от этих параметров зависит эффективность работы преобразователей и антенн. Например, акустико-механический КПД, давление на оси и тыльный лепесток характеристики направленности излучающих антенн определяются величинами активной и реактивной составляющих входного импеданса экрана и коэффициентом передачи колебательной скорости. Свойства антенн, работающих в режиме приема, управляются такими параметрами экранов, как модуль и фаза коэффициента отражения и коэффициент передачи давления.

### § 1. Входной импеданс слоя

В случае простых гармонических колебаний, распространяющихся в жидкой среде в положительном направлении оси  $x$ , решением уравнения Гельмгольца для потенциала скоростей в плоской волне является функция

$$\Phi = \Phi_0 e^{-i(\omega t - kx)} \quad (1.1)$$

Известно [84, 100], что звуковое давление  $p$  и колебательная скорость частиц среды  $v$  связаны с потенциалом скоростей соотношениями

$$p = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad v = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.2)$$

где  $\rho$  — плотность среды. Подставляя в формулы (1.2) значение  $\Phi$  (1.1), получаем

$$p = -i\omega\rho\Phi; \quad v = -ik\Phi.$$

Относя  $p$  к  $v$ , находим

$$p/v = \rho c, \quad (1.3)$$

где  $\rho c$  — акустическое сопротивление среды, иногда называемое волновым сопротивлением.

При распространении волн в материале с механическими потерями (вязкоупругой среде) относительные деформации  $\epsilon_x$  материала отстают

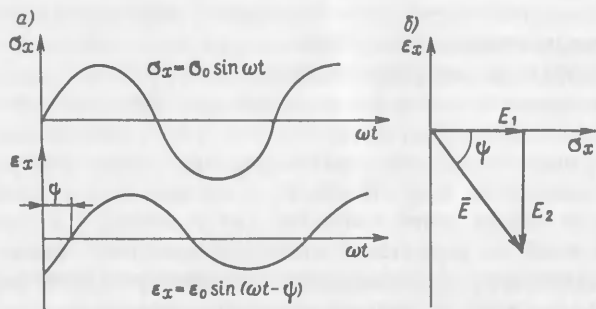


Рис. 1.1. Среда с механическими потерями: а – временная зависимость напряжения  $\sigma_x$  и относительной деформации  $\epsilon_x$ ; б – векторная диаграмма напряжение–деформация.

от вызывающих их напряжений  $\sigma_x$  (рис. 1.1, а). Возникновение разности фаз  $\psi$  между деформацией и напряжением обусловлено релаксационными процессами, которые особенно характерны для полимерных материалов (резин и пластических масс) [64, 98, 126]. В векторной форме процесс изображен на рис. 1.1, б, где  $\bar{E}$  – комплексный модуль упругости среды,  $E_1$  и  $E_2$  – его вещественная и мнимая составляющие. Значение векторной диаграмма следует из закона Гука [79]:

$$\sigma_x/\epsilon_x = \bar{E} = E_1 - iE_2 = E_1(1 - i\eta_E), \quad (1.4)$$

где  $\eta_E = \operatorname{tg} \psi$  – тангенс угла механических потерь в среде.

Скорость распространения упругих волн в изотропных средах связана с модулем  $\bar{E}$  известным [72, 85] соотношением

$$\bar{c} = (\bar{E}/\rho)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Поэтому значение  $\bar{c}$  с учетом формулы (1.4) можно также записать в виде комплексного числа

$$\bar{c} = [E_1/\rho(1 - i\eta_E)]^{1/2} = c(1 - i\eta_c). \quad (1.6)$$

Из формулы (1.6) получаем соотношение между коэффициентом потерь по скорости  $\eta_c$  и модулю упругости  $\eta_E$ :

$$\eta_c = \eta_E [2(1 + \sqrt{1 + \eta_E^2})]^{-1/2}. \quad (1.7)$$

Если потери невелики ( $\eta_E < 0,5$ ), то с ошибкой не более 5% можно принять

$$\eta_c = 0,5\eta_E. \quad (1.8)$$

Найдем выражение для входного импеданса  $Z_{сн}$  слоя толщиной  $l$  (рис. 1.2), выполненного из материала с волновым сопротивлением  $\bar{c}$  и нагруженного на импеданс  $Z_H$ . При нормальном падении звуковой волны импедансы упругого и жидкого слоев совпадают, поскольку в этом случае в упругой среде распространяются только продольные волны.

Запишем выражение для потенциала скорости в виде (1.1), приняв  $\Phi_0 = 1$ :

$$\Phi = e^{-i(\omega t - \bar{k}x)}, \quad (1.9)$$

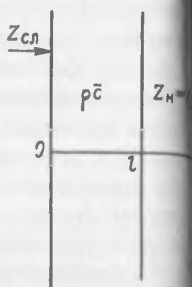


Рис. 1.2. К определению входного импеданса слоя.

где

$$\bar{k} = \frac{\omega}{\bar{c}} = \frac{\omega}{c} \frac{1 + i\eta_c}{1 + \eta_c^2} = k(1 + i\eta_c). \quad (1.10)$$

Амплитуда звуковой волны, распространяющейся в слое с потерями, должна уменьшаться. Подставляя значение (1.10) в формулу (1.9), получаем [13, 67, 114, 131]

$$\Phi = e^{(ik - k\eta_c)x} = e^{-\gamma x}, \quad (1.11) *$$

где

$$\gamma = a - i\beta \quad (1.12)$$

– постоянная распространения;

$$\beta = \frac{\omega}{c(1 + \eta_c^2)} \quad (1.13)$$

– фазовый коэффициент (волновое число);

$$a = \eta_c \beta \quad (1.14)$$

– коэффициент затухания.

Волна, прошедшая в слой, распространяется как в положительном направлении оси  $x$ , так и в отрицательном направлении – после отражения от границы слоя  $x=l$ , которое характеризуется коэффициентом отражения  $r$ . Поэтому потенциал скорости в слое

$$\Phi = e^{-\gamma x} + r e^{\gamma x}. \quad (1.15)$$

Для давления и скорости в слое в соответствии с формулами (1.2) и (1.15) находим следующие выражения:

$$p = -i\omega\rho(e^{-\gamma x} + r e^{\gamma x}); \quad (1.16)$$

$$v = \gamma(e^{-\gamma x} - r e^{\gamma x}). \quad (1.17)$$

Определим входной импеданс слоя как

$$Z_{сн} = \frac{p}{v} \Big|_{x=0} \quad (1.18)$$

принимая, что при  $x=l$

$$\frac{p}{v} \Big|_{x=l} = Z_H, \quad (1.19)$$

подставляя в формулы (1.18) и (1.19) значения  $p$  (1.16) и  $v$  (1.17), получаем

$$Z_{сн} = -\frac{i\omega\rho}{\gamma} \frac{1+r}{1-r}; \quad Z_H = -\frac{i\omega\rho}{\gamma} \frac{e^{-\gamma l} + r e^{\gamma l}}{e^{-\gamma l} - r e^{\gamma l}}. \quad (1.20)$$

\* Фактор времени  $e^{-i\omega t}$  здесь и в дальнейшем опускаем.

Раскроем вначале смысл величины  $-(i\omega\rho)/\gamma$ . Заменяя постоянную  $\gamma$  ее значением (1.12), с учетом формул (1.13) и (1.14) найдем

$$-\frac{i\omega\rho}{a-i\beta} = \frac{\omega\rho}{\beta} \frac{1-i\eta_c}{1+\eta_c^2} = \rho c(1-i\eta_c) = \rho\bar{c}. \quad (1.2)$$

Искомая величина есть комплексное волновое сопротивление материала слоя. Из второй формулы (1.20) найдем коэффициент отражения

$$r = e^{-2\gamma l} \frac{Z_H - \rho\bar{c}}{Z_H + \rho\bar{c}}, \quad (1.2)$$

который, как видим, зависит от волновой толщины слоя, подлежащей нагрузке  $Z_H$ . Подставив выражение (1.22) в первую из формул (1.20) получим

$$Z_{ст} = \rho\bar{c} \frac{Z_H \operatorname{ch} \gamma l + \rho\bar{c} \operatorname{sh} \gamma l}{\rho\bar{c} \operatorname{ch} \gamma l + Z_H \operatorname{sh} \gamma l} \quad (1.2)$$

или в другой форме

$$Z_{ст} = \rho\bar{c} \frac{Z_H + \rho\bar{c} \operatorname{th} \gamma l}{\rho\bar{c} + Z_H \operatorname{th} \gamma l}. \quad (1.2)$$

Раскроем  $\operatorname{ch} \gamma l$  и  $\operatorname{sh} \gamma l$  через функции одного аргумента:

$$\operatorname{ch}(\alpha - i\beta)l = \operatorname{ch} \alpha l \cos \beta l - i \operatorname{sh} \alpha l \sin \beta l;$$

$$\operatorname{sh}(\alpha - i\beta)l = \operatorname{sh} \alpha l \cos \beta l - i \operatorname{ch} \alpha l \sin \beta l.$$

Подставляя эти значения в формулу (1.23), группируя члены, зависящие от  $\alpha l$ , и принимая для слоя, граничащего с водой,  $Z_H = (\rho c)_в$ , находим

$$Z_{ст} = \rho\bar{c} \frac{1 - i\bar{A} \operatorname{tg} \beta l}{\bar{A} - i \operatorname{tg} \beta l}, \quad (1.2)$$

где

$$\bar{A} = \frac{\rho\bar{c} \operatorname{ch} \alpha l + (\rho c)_в \operatorname{sh} \alpha l}{(\rho c)_в \operatorname{ch} \alpha l + \rho\bar{c} \operatorname{sh} \alpha l} = \frac{\bar{m} + \operatorname{th} \alpha l}{1 + \bar{m} \operatorname{th} \alpha l};$$

$$\bar{m} = \frac{\rho\bar{c}}{(\rho c)_в} = \frac{\rho c}{(\rho c)_в} (1 - i\eta_c) = m(1 - i\eta_c).$$

Величина  $m$  называется относительным волновым сопротивлением материала слоя и является важным параметром, определяющим отражающую способность слоя. Значениями  $m \gg 1$  обладают металлы, значениями  $m < 1$  — податливые среды.

Физический смысл формулы (1.25) проще понять, рассмотрим некоторые частные случаи.

**Слой без потерь.** Если среда, из которой выполнен слой, не обладает механическими потерями, т. е.  $a=0$ , из формул (1.26) и (1.27) получим

$$\bar{A} = m; \quad \rho\bar{c} = \rho c.$$

Тогда в соответствии с выражением (1.25)

$$Z_{ст} = \rho c \frac{1 - im \operatorname{tg} \beta l}{m - i \operatorname{tg} \beta l} = R_{ст} + iX_{ст}, \quad (1.28)$$

где  $R_{ст}$  и  $X_{ст}$  — активная и реактивная составляющие входного импеданса слоя. Из формулы (1.28) находим

$$\frac{R_{ст}}{(\rho c)_в} = \frac{m^2(1 + \operatorname{tg}^2 \beta l)}{m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l} \quad (1.29)$$

$$\frac{X_{ст}}{(\rho c)_в} = \frac{m \operatorname{tg} \beta l (1 - m^2)}{m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l} \quad (1.30)$$

При  $\beta l = n\pi$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), т. е. при  $l = n(\Lambda/2)$ , где  $\Lambda = 2\pi/k$  — длина волны в материале слоя, величины (1.29) и (1.30) принимают значения

$$R_{ст}/(\rho c)_в = 1; \quad X_{ст}/(\rho c)_в = 0.$$

Эти соотношения иллюстрируют хорошо известный из теории слоев [13–15, 100, 112, 118, 119] и длинных линий [6, 67, 114] факт, что слой без потерь с толщиной, кратной половине длины волны, обладает входным импедансом, равным волновому сопротивлению среды, на которую он нагружен.

При  $\beta l = (2n+1)(\pi/2)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), т. е. при  $l = (2n+1)(\Lambda/4)$ ,  $R_{ст}/(\rho c)_в = m^2$ ;  $X_{ст}/(\rho c)_в = 0$ .

Это означает, что слой с толщиной, кратной нечетному числу четвертей длины волны, обладает при фиксированных  $m$  минимальной величиной  $R_{ст}/(\rho c)_в$  в случае  $m < 1$  и максимальной — в случае  $m > 1$ .

Таким образом, значения удельных активной  $R_{ст}/(\rho c)_в$  и реактивной  $X_{ст}/(\rho c)_в$  составляющих входного импеданса слоя являются периодическими функциями волновой толщины  $\beta l$  (рис. 1.3). Для ориентировочной оценки хода зависимостей  $R_{ст}/(\rho c)_в$  удобно пользоваться табл. 1.

Функция  $X_{ст}/(\rho c)_в$ , как видно из рисунка, при определенных  $\beta l$  принимает экстремальные значения.

Положение и величины этих экстремумов находим, дифференцируя  $X_{ст}/(\rho c)_в$  (1.30) по  $\operatorname{tg} \beta l$  и приравняв результат нулю:

$$\frac{m(1 - m^2)(m^2 - \operatorname{tg}^2 \beta l)}{(m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l)^2} = 0, \quad (1.31)$$

$$\operatorname{tg} \beta l = \pm m. \quad (1.32)$$

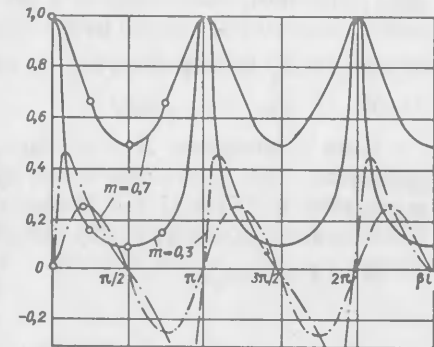


Рис. 1.3. Зависимости удельных величин активной  $R_{ст}/(\rho c)_в$  и реактивной  $X_{ст}/(\rho c)_в$  составляющих входного импеданса слоя без потерь от волновой толщины  $\beta l$ .

Точками отмечены значения, рассчитанные по табл. 1 и 2.

Таблица 1. Значения  $R_{сл}/(\rho c)_в$  при фиксированных  $\beta l$ 

|                             |   |                      |                 |                      |       |
|-----------------------------|---|----------------------|-----------------|----------------------|-------|
| $\beta l$                   | 0 | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$     | $\pi$ |
| $\frac{R_{сл}}{(\rho c)_в}$ | 1 | $\frac{2m^2}{1+m^2}$ | $m^2$           | $\frac{2m^2}{1+m^2}$ | 1     |

(Случай, когда знаменатель равен бесконечности — при  $\beta l = (2n+1)\pi/2$ ) нами уже рассмотрен, при этом  $X_{сл}/(\rho c)_в = 0$ ).

Подставив значение (1.32) в формулу (1.30), получим

$$X_{сл}/(\rho c)_в = \pm (1 - m^2)/2, \quad (1.33)$$

причем здесь знак „+“ соответствует положительным, а знак „-“ — отрицательным значениям  $\text{tg } \beta l$  в формуле (1.32).

С использованием выражений (1.32) и (1.33) получаем значения для ориентировочной оценки хода зависимости  $X_{сл}/(\rho c)_в(\beta l)$  (см. табл. 1).

Нанеся характерные точки, определенные по табл. 1 и 2, на кривые  $R_{сл}/(\rho c)_в$  и  $X_{сл}/(\rho c)_в$  (см. рис. 1.3), видим, что их вполне достаточно, чтобы оценить ход всей кривой, особенно при  $m$ , не слишком отличающихся от единицы ( $10 > m > 0,1$ ).

Для металлических слоев ( $m \gg 1$ ) при малой волновой толщине слоя  $\beta l \ll 1$  удобно пользоваться следующими более простыми формулами. Принимая  $\text{tg } \beta l = \beta l$  (это справедливо для  $\beta l < 0,2$ ) и учитывая, что  $\text{tg}^2 \beta l \ll 1 \ll m^2$ , из формул (1.29) и (1.30) находим

$$\frac{R_{сл}}{(\rho c)_в} = 1; \quad \frac{X_{сл}}{(\rho c)_в} = -m\beta l = -\frac{\rho c}{(\rho c)_в} \frac{\omega}{c} l = -\frac{\omega M}{(\rho c)_в}$$

где  $M = \rho l$  — масса единицы площади слоя.

Таким образом, при расчете входного импеданса тонкой металлической пластины, находящейся в воде, при нормальном падении звука можно пользоваться одной из следующих формул:

$$Z_{сл} = Z_n - i\omega M = (\rho c)_в - i\omega M; \quad (1.34)$$

$$Z_{сл}/(\rho c)_в = 1 - im\beta l.$$

**Слой с потерями.** Для определения входного импеданса слоя, полного из материала с механическими потерями, преобразуем выражения (1.25) и (1.26). Избавляясь от мнимости в знаменателе подстановкой в формулу (1.28) значения (1.27) для  $\bar{m}$ , найдем

$$\bar{A} = A - im\eta_c B,$$

где

$$A = \frac{m(1 + \text{th}^2 al) + (1 + |\bar{m}|^2) \text{th} al}{1 + 2m \text{th} al + |\bar{m}|^2 \text{th}^2 al};$$

$$B = \frac{1 - \text{th}^2 al}{1 + 2m \text{th} al + |\bar{m}|^2 \text{th}^2 al};$$

$$|\bar{m}|^2 = m^2(1 + \eta_c^2).$$

Таблица 2. Значения  $X_{сл}/(\rho c)_в$  при фиксированных  $\beta l$ 

|                             |   |                   |                         |                 |                         |                   |       |
|-----------------------------|---|-------------------|-------------------------|-----------------|-------------------------|-------------------|-------|
| $\beta l$                   | 0 | $\arctg m$        | $\frac{\pi}{4}$         | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$        | $\arctg(-m)$      | $\pi$ |
| $\frac{X_{сл}}{(\rho c)_в}$ | 0 | $\frac{1-m^2}{2}$ | $m \frac{1-m^2}{1+m^2}$ | 0               | $m \frac{m^2-1}{m^2+1}$ | $\frac{m^2-1}{2}$ | 0     |

При  $\eta_c^2 \ll 1$

$$A = \frac{m + \text{th} al}{1 + m \text{th} al}; \quad B = \frac{1 - \text{th}^2 al}{(1 + m \text{th} al)^2}. \quad (1.39)$$

Подставляя формулу (1.36) в выражение (1.25) для  $Z_{сл}$ , находим

$$\text{Re}(Z_{сл}/\rho \bar{c}) = A \frac{1 + \text{tg}^2 \beta l}{A^2 + (m\eta_c B + \text{tg } \beta l)^2}; \quad (1.40)$$

$$\text{Im}(Z_{сл}/\rho \bar{c}) = \frac{m\eta_c B(1 - \text{tg}^2 \beta l) + \text{tg } \beta l [1 - A^2 - (m\eta_c B)^2]}{A^2 + (m\eta_c B + \text{tg } \beta l)^2}. \quad (1.41)$$

Рассматривая частные случаи, по формулам (1.40) и (1.41) оценим потери активной и реактивной составляющих входного импеданса слоя. При  $\beta l = n\pi$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ) из выражения (1.25) получаем

$$Z_{сл}/(\rho c)_в = \bar{m}/\bar{A}. \quad (1.42)$$

учетом формул (1.40) и (1.41) находим

$$\frac{R_{сл}}{(\rho c)_в} = \frac{m}{A} \frac{1 + \eta_c^2 m(B/A)}{1 + (m\eta_c(B/A))^2}; \quad (1.43)$$

$$\frac{X_{сл}}{(\rho c)_в} = -\eta_c \frac{m}{A} \frac{1 - m\eta_c(B/A)}{1 + (m\eta_c(B/A))^2}. \quad (1.44)$$

При  $\beta l = (2n+1)\pi/2$  ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) из формулы (1.25) следует

$$Z_{сл}/(\rho c)_в = \bar{m}\bar{A}. \quad (1.45)$$

Отсюда

$$R_{сл}/(\rho c)_в = mA(1 - m\eta_c^2(B/A)); \quad (1.46)$$

$$X_{сл}/(\rho c)_в = -\eta_c mA(1 + m\eta_c(B/A)). \quad (1.47)$$

Из формул (1.43) — (1.47) входит отношение  $mB/A$ , которое определяется из выражений (1.37) и (1.38):

$$\frac{mB}{A} = \frac{m(1 - \text{th}^2 al)}{m(1 + \text{th}^2 al) + \text{th} al(1 + |\bar{m}|^2)}. \quad (1.48)$$

При малом  $al$  величина  $m(B/A)$  уменьшается от 1 (при  $al = 0$ ) до 0 (при  $al = 1$ ). Расчеты показывают, что даже для  $m = 1$  уже при  $\eta_c \gg 0,1$  величина  $m(B/A)$  оказывается настолько малой, что членами  $\eta_c m(B/A)$ ,  $m\eta_c(B/A)$  и  $[m\eta_c(B/A)]^2$  в формулах (1.43) — (1.47) можно

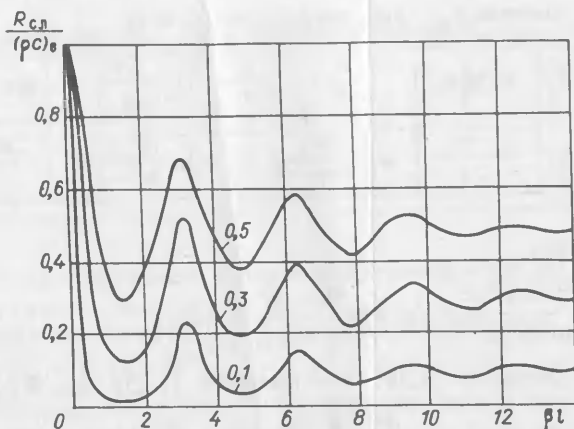


Рис. 1.4. Зависимости удельной величины активной составляющей входного импеданса слоя с потерями ( $\eta_c = 0,1$ ) от волновой толщины  $\beta l$  для различных значений  $m$ .

пренебречь по сравнению с единицей. Поэтому выражения (1.36), (1.45) и (1.45) для  $Z_{сл}/(\rho c)_в$  преобразуются к следующему виду:

$$\frac{R_{сл}}{(\rho c)_в} \approx |\bar{m}| \frac{A(1 + \operatorname{tg}^2 \beta l)}{A^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}; \quad (1)$$

$$\frac{X_{сл}}{(\rho c)_в} \approx |\bar{m}| \frac{\operatorname{tg} \beta l (1 - A^2)}{A^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}; \quad (1)$$

$$\frac{Z_{сл}}{(\rho c)_в} [n\pi] = \frac{m}{A} (1 - i\eta_c); \quad (1)$$

$$\frac{Z_{сл}}{(\rho c)_в} \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] = mA(1 - i\eta_c). \quad (1)$$

Если  $\operatorname{th} al \approx 1$  ( $al \geq 2$ ), то в соответствии с формулой (1.37)  $A \approx 1$ . Тогда

$$\frac{Z_{сл}}{(\rho c)_в} [n\pi] = \frac{Z_{сл}}{(\rho c)_в} \left[ (2n+1) \frac{\pi}{2} \right] = m(1 - i\eta_c). \quad (1)$$

Это означает, что входной импеданс слоя с потерями при  $al \geq 2$  не зависит от его толщины и практически равен волновому сопротивлению среды  $Z_{сл} \approx \rho c$ , а слой становится как бы полубесконечным.

Зависимости  $R_{сл}/(\rho c)_в$  от  $\beta l$ , рассчитанные для ряда  $m$ , показаны (рис. 1.4), что активная составляющая входного импеданса слоя с потерями осциллирует с периодом  $\beta l = \pi$ , причем размах осцилляций с ростом  $\beta l$  при  $\eta_c \neq 0$  уменьшается. При значениях  $al = \beta l \eta_c$  осцилляции прекращаются. Огибающие кривых  $R_{сл}/(\rho c)_в$  приведены

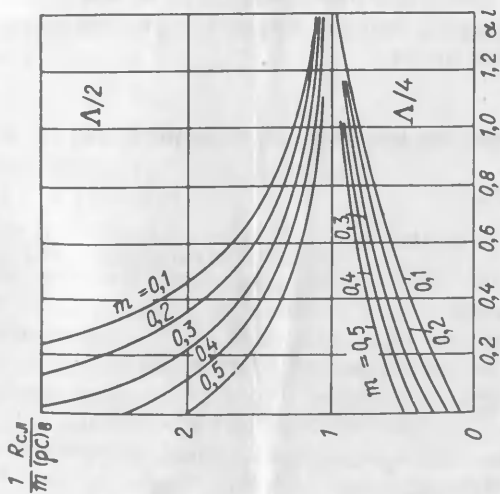


Рис. 1.5. Зависимость максимальных (при  $l = \Delta/2$ ) и минимальных (при  $l = \Delta/4$ ) значений удельной величины активной составляющей входного импеданса слоя от  $\alpha l$ .

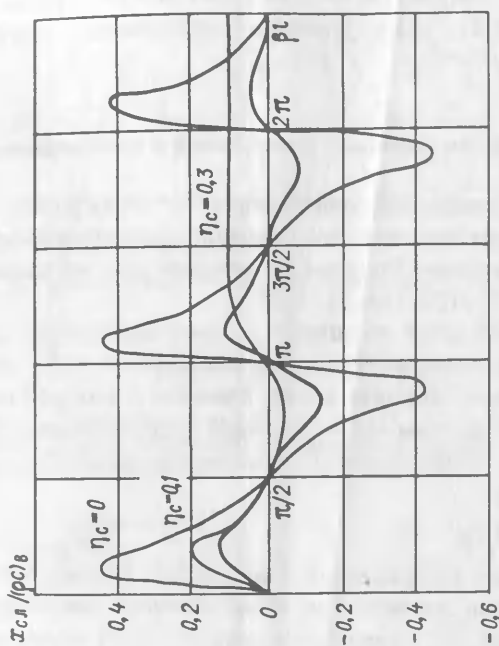


Рис. 1.6. Зависимость удельной величины реактивной составляющей входного импеданса слоя  $X_{сл}/(\rho_c)_{в}$  от волновой толщины  $\beta l$  для  $m = 0,3$  при различных коэффициентах потерь  $\eta_c$ .

на рис. 1.5. Для иллюстрации хода кривых  $X_{сл}/(\rho c)_в$  на рис. 1.6 построены зависимости  $X_{сл}/(\rho c)_в$  от  $\beta l$  для  $m = 0,3$ . Положения экстремумов функции по оси  $\beta l$  практически совпадают со случаем слоя без потерь (см. рис. 1.3), а их значения уменьшаются, переходя к  $\alpha l \geq 2$  в  $X_{сл}/(\rho c)_в = m\eta_c$ .

## § 2. Коэффициенты отражения и прохождения

Параметрами, определяющими отражающие и звукоизолирующие свойства акустических экранов, являются коэффициенты отражения и прохождения. Получим выражения для их расчета, пользуясь работами [14, 15, 100, 106, 112, 138].

Пусть на плоский слой толщиной  $l$ , выполненный из материала с волновым сопротивлением  $\rho \bar{c}$  и расположенный в воде, нормально к слою падает плоская звуковая волна, давление в которой обозначено через  $p$  (рис. 1.7). При этом часть звуковой энергии отразится, а часть пройдет через слой. Коэффициенты отражения и прохождения определяются по формулам

$$r = p_r/p; \quad t = p_t/p,$$

где  $p_r$  и  $p_t$  — давления в отраженной и прошедшей волнах. Между  $r$  и  $t$  существует следующая взаимосвязь, обусловленная законом сохранения звуковой энергии:

$$|r|^2 + |t|^2 + f(\alpha) = 1,$$

где  $f(\alpha)$  — функция, зависящая от механических потерь в слое и определяющая ту часть энергии, которая поглощается в слое при прохождении звука. Для слоя без потерь

$$|r|^2 + |t|^2 = 1.$$

Коэффициент отражения находится по формуле [14]

$$r = \frac{Z_{сл} - (\rho c)_в}{Z_{сл} + (\rho c)_в}$$

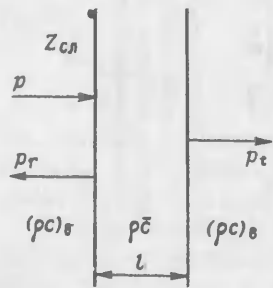


Рис. 1.7. К определению коэффициентов отражения  $r$  и прохождения  $t$ .

Подставляя сюда значение  $Z_{сл}$  (1.2) получаем

$$r = \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1 + 2m \operatorname{cth} \gamma l}.$$

Для слоя без потерь ( $\alpha = 0$ )

$$r = |r| e^{i\varphi},$$

где

$$|r| = |m^2 - 1| [(m^2 + 1)^2 + 4m^2 \operatorname{ctg}^2 \beta l]^{-1/2}$$

— модуль коэффициента отражения,

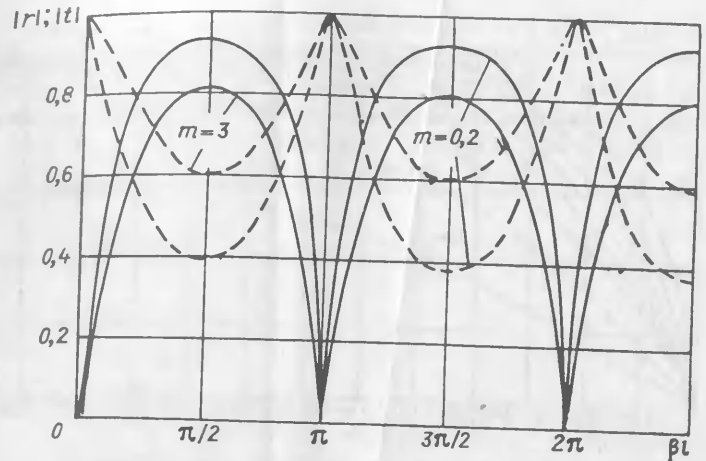


Рис. 1.8. Зависимости  $|r|$  (—) и  $|t|$  (---) от волновой толщины  $\beta l$  слоя без потерь, построенные в области  $0 < \beta l < 5\pi/2$  при различных значениях  $m$ .

$$\varphi = -\arctg \frac{2m \operatorname{ctg} \beta l}{m^2 + 1} \quad (2.7)$$

его фазы.

По формуле (2.2) с учетом выражения (2.6) находим модуль коэффициента прохождения через слой без потерь:

$$|t| = 2m [(m^2 + 1)^2 + 4m^2 \operatorname{ctg}^2 \beta l]^{-1/2}. \quad (2.8)$$

Выражения (2.6) и (2.8) для  $|r|$  и  $|t|$  получены Рэлеем [8, 106].

При  $\beta l = n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$|r| = 0; \quad |t| = 1,$$

т.е. слой без потерь, толщина которого кратна половине длины волны материала, полностью пропускает звук.

При  $\beta l = (2n + 1)\pi/2$

$$|r| = |(m^2 - 1)/(m^2 + 1)|; \quad |t| = 2m/(m^2 + 1).$$

т.е. слой, толщина которого нечетно кратна четверти длины волны, падает максимальным отражением и минимальным прохождением.

Зависимости  $|r|$  и  $|t|$  от  $\beta l$  (рис. 1.8), рассчитанные по формулам (2.6) и (2.8), представляют собой осциллирующие функции с периодом  $\pi$ . Поскольку кривые  $|r|$  и  $|t|$  симметричны относительно  $\beta l = \pi/2, 3\pi/2, \dots$ , то для оценки акустических свойств слоев достаточно рассмотреть семейство кривых, построенных для различных  $m$  в области  $0 \leq \beta l \leq \pi/2$ . Поэтому для практического использования

эти формулы полезны графики рис. 1.9. Отметим, что, как видно из формул (2.6) и (2.8), замена величины  $m$  на  $1/m$  не изменяет модули  $r$  и  $t$ .

Это означает, например, что кривые для  $m = 2$  и  $m = 0,5$  совпадают с другим.



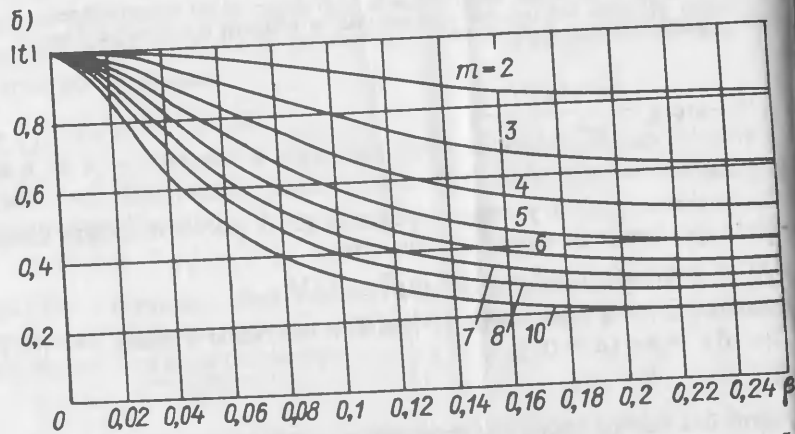
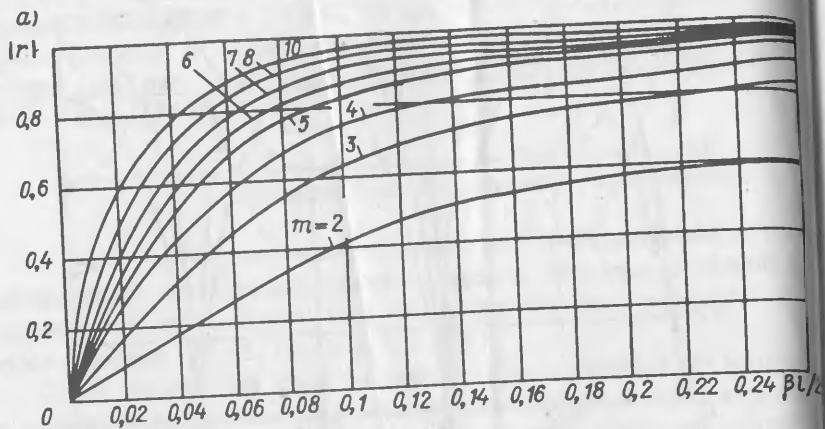


Рис. 1.9. Зависимости  $|r|$  (а) и  $|t|$  (б) от волновой толщины  $\beta l$  слоя без потерь, построенные в области  $0 < \beta l < \pi/2$  при различных значениях  $m$ .

В случае тонких металлических пластин в воде можно получить простые соотношения. Подставив в формулу (2.3) выражение (1.10) для  $Z_{сл}$ , найдем

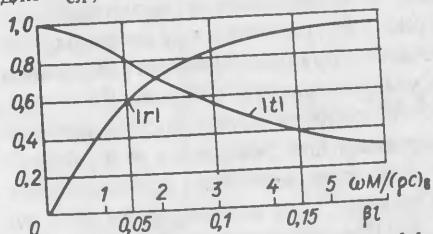


Рис. 1.10. Изменение модулей коэффициентов отражения  $|r|$  и прохождения  $|t|$  в зависимости от массы  $M$  стального слоя в воде.

$$r = \left[ 1 + 2i \frac{(\rho c)_в}{\omega M} \right]^{-1}$$

Тогда

$$|r| = \left\{ 1 + 4 \left[ \frac{(\rho c)_в}{\omega M} \right]^2 \right\}^{-1/2};$$

$$|t| = \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left[ \frac{\omega M}{(\rho c)_в} \right]^2 \right\}^{-1/2}.$$

По формулам (2.10) можно проводить расчет  $|r|$  и  $|t|$  для стальных пластин до значений  $(\omega M)/(\rho c)_в \leq 6$  (рис. 1.10).

Существенное значение при анализе работы акустических экранов в приемных антеннах имеет фаза коэффициента отражения  $\varphi$  [см. формулу (2.7)]. Для определения знака  $\varphi$  необходимо найти значения  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  [100]. С учетом формул (2.3), (2.5), (1.29) и (1.30) получим

$$\sin \varphi = \frac{2m(1-m^2) \operatorname{tg} \beta l}{m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}; \quad (2.11)$$

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta l (m^4 - 1)}{m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}. \quad (2.12)$$

Проанализируем формулы (2.11) и (2.12) для различных  $m$ .

$m > 1$ . При  $0 < \beta l < \pi/2$  величина  $\cos \varphi$  — положительная, а  $\sin \varphi$  — отрицательная, поэтому угол  $\varphi$  лежит в 4-й четверти, т. е.  $-\pi/2 < \varphi < 0$ . При  $\pi/2 < \beta l < \pi$   $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  — положительные величины, и  $0 < \varphi < \pi/2$ . С дальнейшим ростом  $\beta l$  картина будет повторяться.

$m < 1$ . При  $0 < \beta l < \pi/2$   $\cos \varphi$  — отрицательный, а  $\sin \varphi$  — положительный, и угол  $\varphi$  лежит во 2-й четверти, т. е.  $\pi/2 < \varphi < \pi$ . При  $\pi/2 < \beta l < \pi$   $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$  — отрицательные величины, поэтому  $-\pi < \varphi < -3\pi/2$ .

График изменения фазы коэффициента отражения, построенный на основании формулы (2.7) и приведенных рассуждений, представлен на рис. 1.11, б. Анализ графика показывает, что, например, для  $m > 1$  при  $\beta l = 0$  значение  $\varphi = -\pi/2$ . При росте  $\beta l$  фаза уменьшается.

При  $\beta l = \pi/2$  она переходит через нуль, что подтверждает хорошо известный факт: если импеданс отражателя велик (а при четвертьволновом слое  $m \gg 1$ ,  $(Z_{сл}/(\rho c)_в) \gg 1$ ), отражение происходит без сдвига фазы. При  $\pi/2 < \beta l < \pi$  фаза симметрично повторяет ход кривой, соответствующей области  $0 < \beta l < \pi/2$ , но становится положительной. Таким образом, фаза  $\varphi$  коэффициента отражения от слоя, выполненного из материала с  $m > 1$ , изменяется от  $-\pi/2$

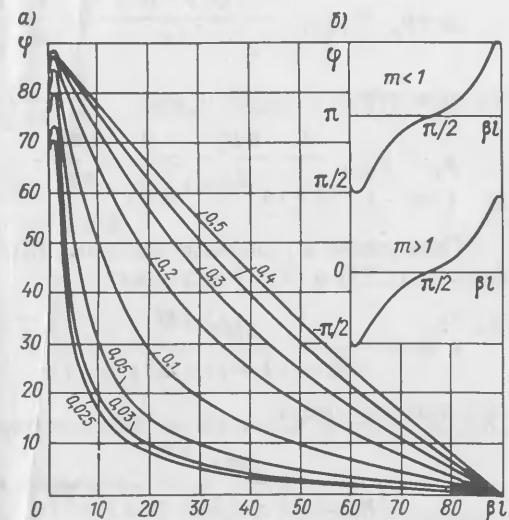


Рис. 1.11. Фаза коэффициента отражения от слоя без потерь: а — в области  $0 < \beta l < \pi/2$ ; б — в области  $\pi/2 < \beta l < \pi$ . Числами на кривых указана величина  $m$ .

до  $+\pi/2$ , осциллируя относительно значения  $\varphi = 0$ . В случае  $m < 1$  осцилляции фазы происходят относительно значения  $\varphi = \pi$ , а фаза  $\varphi$  меняется от  $+\pi/2$  до  $+3\pi/2$ .

Из выражения (2.7) следует, что численные значения фазы совпадают при замене  $m$  на  $1/m$ . Поэтому достаточно для различных  $m$ , например, меньших единицы, построить зависимости  $\varphi(\beta l)$  в области  $0 \leq \beta l \leq \pi/2$ , чтобы, зная общий характер изменения фазы (см. рис. 1.11, б), пользоваться построенным графиком во всех остальных случаях. Абсолютные значения фазы построены на рис. 1.11, а, причём углы в этом случае для удобства пользования отложены в градусах.

Отметим, что для  $m \gg 1$  выражение (2.7) принимает вид

$$\operatorname{tg} \varphi = -2/m \operatorname{tg} \beta l,$$

а для  $m \ll 1$

$$\operatorname{tg} \varphi = -2m/\operatorname{tg} \beta l.$$

Обратимся теперь к рассмотрению функций  $|r|$  и  $f(\alpha)$ , которые в случае среды с потерями можно найти из решения граничной задачи для слоя. Если на слой падает плоская волна с единичной амплитудой  $p = e^{ikx}$  (см. рис. 1.7), то отраженную и прошедшую волны, а также волну внутри слоя можно представить в следующем виде [138]:

$$p_r = re^{-ikx}; p_t = te^{ikx}; p_{\text{сл}} = D'e^{-\gamma x} + E'e^{\gamma x}. \quad (2.1)$$

Граничные условия задаются, исходя из непрерывности давлений и тангенциальных скоростей на границах слоя:

при  $x = 0$

$$p + p_r = p_{\text{сл}}; \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial(p + p_r)}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\text{сл}}}{\partial x};$$

при  $x = l$

$$p_t = p_{\text{сл}}; \frac{1}{\rho_b} \frac{\partial p_t}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{\text{сл}}}{\partial x}.$$

Подставляя в граничные условия (2.16) давления из (2.15) с учетом формул (1.21) и (1.27), находим

$$r = \frac{2me^{-ikl}}{2m \operatorname{ch} \gamma l + (1+m^2) \operatorname{sh} \gamma l}. \quad (2.1)$$

Для слоя без потерь

$$r = \frac{2me^{-ikl}}{2m \cos \beta l - i(1+m^2) \sin \beta l} = |r|e^{i\tau},$$

где  $|r|$  определяется выражением (2.8).

Из формулы (2.18) видно, что набег фазы при прохождении звука через слой с волновым сопротивлением  $\rho c = m(\rho c)_в$  определяется также волновой толщиной слоя в воде.

Для нахождения функции потерь в слое  $f(\alpha)$  подставим в формулы (2.4) и (2.17) значение (1.12) для  $\gamma$ . Тогда получим

$$|r|^2 = \frac{(m^2 - 1)^2 (\operatorname{th}^2 \alpha l + \operatorname{tg}^2 \beta l)}{(1 + m \operatorname{th} \alpha l)^2 [(A + m)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l (1 + mA)^2]}, \quad (2.19)$$

$$|t|^2 = \frac{4m^2}{\cos^2 \beta l \operatorname{ch}^2 \alpha l (1 + m \operatorname{th} \alpha l)^2 [(A + m)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l (1 + mA)^2]}, \quad (2.20)$$

где  $A$  определяется формулой (1.39).

Выражения (2.1), (2.19) и (2.20) дают возможность найти

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(m^2 - 1)^2 (\operatorname{th}^2 \alpha l + \operatorname{tg}^2 \beta l) + \frac{4m^2}{\cos^2 \beta l \operatorname{ch}^2 \alpha l}}{(1 + m \operatorname{th} \alpha l)^2 [(A + m)^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l (1 + mA)^2]}. \quad (2.21)$$

Формула (2.21) показывает, что функция  $f(\alpha)$  зависит также от волновой толщины слоя  $\beta l$ . В частных случаях

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(1 - m^2)^2 \operatorname{th}^2 \alpha l + \frac{4m^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha l}}{(1 + m \operatorname{th} \alpha l)^2 (m + A)^2} \quad (\text{при } \beta l = n\pi); \quad (2.22)$$

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(1 - m^2)^2 + \frac{4m^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha l}}{(1 + m \operatorname{th} \alpha l)^2 (1 + mA)^2} \quad (\text{при } \beta l = (2n + 1)\pi/2). \quad (2.23)$$

Если  $\alpha l > 2$ , т. е.  $A = \operatorname{th} \alpha l \approx 1$ , а  $4m^2/(\operatorname{ch}^2 \alpha l) < (1 - m^2)$ , то выражения (2.22) и (2.23) совпадают и

$$f(\alpha) = 1 - \frac{(1 - m^2)^2}{(1 + m)^4} = \frac{4m}{(1 + m)^2} = |r|^2. \quad (2.24)$$

Это соответствует случаю прохождения звука через границу раздела двух полубезграничных сред.

Аналогичным образом из формул (2.19) и (2.20) могут быть найдены экстремальные значения  $|r|$  и  $|t|$ . Графики изменения модулей коэффициентов отражения и прохождения в зависимости от волновой толщины слоя приведены на рис. 1.12. Кривые представляют собой осциллирующие функции  $\beta l$ . По сравнению со слоем без потерь (см. рис. 1.8) величина максимумов  $|r|$ , которые наблюдаются при  $\beta l \approx$

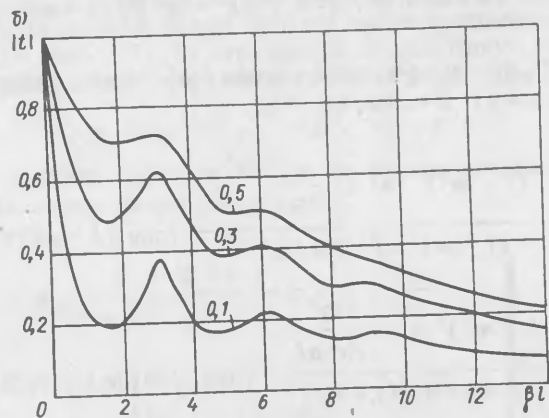
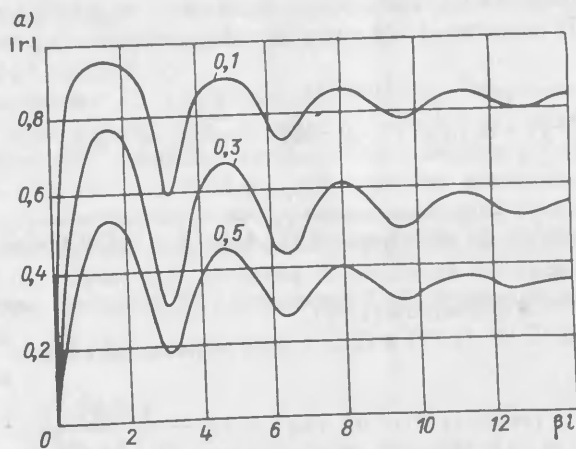


Рис. 1.12. Коэффициенты отражения  $|r|$  (а) и прохождения  $|t|$  (б) для слоя с потерями ( $\eta_c = 0,1$ ) при различных значениях  $m$ .

$\approx (2n+1)\pi/2$ , уменьшается, а провалы при  $\beta l \approx n\pi$  сглаживаются. При достижении определенных значений  $\beta l$ , когда выполняется условие  $\beta l \eta_c \geq 2$ , функция  $|r|$  перестает осциллировать и принимает постоянное значение, равное коэффициенту отражения от полубезграничной среды  $|r| = |(\bar{m} - 1)/(\bar{m} + 1)|$ .

С ростом  $\beta l$  коэффициент прохождения через слой падает, при этом даже сравнительно небольшие потери в слое существенным образом уменьшают максимумы функции  $|t|$ , которые наблюдаются при  $\beta l \approx \pi$ . В пределе кривые  $|t|$  стремятся к величине, определяемой формулой (2.24). При  $\eta_c > 0,2$  резонансные явления в слое практически прекращаются, и график  $|t|(\beta l)$  принимает вид монотонно убывающей функции.

В заключение отметим, что здесь не рассмотрено наклонное падение звука на слой, эти вопросы достаточно полно освещены в работах [14, 138]. Укажем попутно на весьма полезный график зависимости  $|r|$  от произведения частоты на толщину слоя воздуха в воде, построенный для различных гидростатических давлений, который приведен в работе [138, с. 212]. Этим графиком удобно пользоваться при оценке изменения свойств экранов из эластичных оболочек, содержащих воздух [166, 170], под действием внешнего гидростатического давления.

### § 3. Коэффициенты передачи

При работе плоской экранированной антенной решеткой, состоящей из стержневых излучателей (рис. 1.13), тыльная поверхность преобразователей нагружена на входной импеданс экрана [68, 93]. Прохождение через экран характеризуется соотношением колебательных скоростей  $v_1$  и  $v_2$ . Поэтому для оценки тыльного излучения такой экранированной антенны необходимо знать коэффициент передачи колебательной скорости через экран  $\Pi_v = v_2/v_1$ . Отметим, что в случае, когда импеданс экрана мало влияет на перераспределение колебательных скоростей тыльной и рабочей поверхностей преобразователей, величина  $\Pi_v$  равна максимальному значению тыльного лепестка характеристики направленности рассматриваемой антенны  $\sigma_T$  (см. § 14).

Коэффициентом передачи  $\Pi_v$  удобно пользоваться при расчете переходных слоев для преобразователя [51, 56–58, 94]. Анализ характеристик  $\Pi_v$  позволяет определить оптимальные толщины экранирующих переходных (согласующих) слоев и рассчитать акустико-механические характеристики преобразователей при наличии этих слоев. В ряде работ используется система из двух переходных слоев. Соотношения, полученные в статье [5] на основании представления слоев как системы с сосредоточенными параметрами, справедливы лишь в сравнительно узком частотном диапазоне.

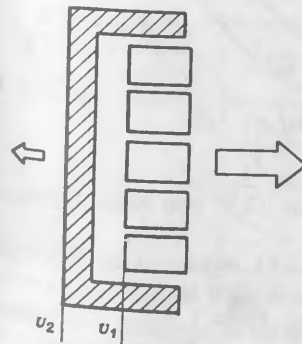


Рис. 1.13. Экранирование антенны, состоящей из стержневых преобразователей.

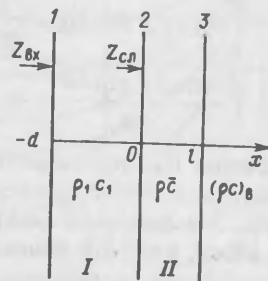


Рис. 1.14. Двухслойная система.

Рассмотрим общий случай при произвольных толщинах двух слоев. Обозначения ясны из рис. 1.14. Полагая, что в слое I механические потери отсутствуют, в соответствии с работой [128] запишем формулы, определяющие взаимосвязь давлений  $p$  с колебательными скоростями

$$v_1 = v_2 \cos kd - i (p_2/\rho_1 c_1) \sin kd; \quad (3.1)$$

$$p_1 = p_2 \cos kd - i v_2 \rho_1 c_1 \sin kd; \quad (3.2)$$

$$v_3 = v_2 \operatorname{ch} \gamma l - (p_2/\rho \bar{c}) \operatorname{sh} \gamma l; \quad (3.3)$$

$$p_3 = p_2 \operatorname{ch} \gamma l - v_2 \rho \bar{c} \operatorname{sh} \gamma l, \quad (3.4)$$

где индексы 1, 2, 3 относятся к соответствующим границам слоев (рис. 1.14). Учитывая, что

$$p_2/v_2 = Z_{\text{сл}}$$

[см. (1.23)], из формулы (3.1) определим

$$P'_v = \frac{v_2}{v_1} = \left( \cos kd - i \frac{Z_{\text{сл}}}{\rho_1 c_1} \sin kd \right)^{-1}.$$

Аналогичным образом из формулы (3.3) с использованием выражений (3.5) и (1.23) получаем коэффициент передачи через слой II:

$$P''_v = \frac{v_3}{v_2} = \operatorname{ch} \gamma l - \frac{Z_{\text{сл}}}{\rho \bar{c}} \operatorname{sh} \gamma l = \frac{\rho \bar{c}}{\rho \bar{c} \operatorname{ch} \gamma l + Z_{\text{н}} \operatorname{sh} \gamma l} = \bar{m} \left\{ \operatorname{ch} \alpha l [\cos \beta l (\bar{m} + \operatorname{th} \alpha l) - i \sin \beta l (1 + \bar{m} \operatorname{th} \alpha l)] \right\}^{-1}$$

Суммарный коэффициент передачи колебательной скорости через два слоя

$$P_v = v_3/v_1 = (v_2/v_1)(v_3/v_2) = P'_v P''_v = \left[ \cos kd \left( \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{|\bar{m}|} \right) - i \frac{\sin kd}{m_1} (\operatorname{ch} \gamma l + |\bar{m}| \operatorname{sh} \gamma l) \right]^{-1},$$

где  $|\bar{m}| = |\rho \bar{c}|/(\rho c)_в$ ;  $m_1 = \rho_1 c_1/(\rho c)_в$  – в случае  $Z_{\text{н}} = (\rho c)_в$ .

Если слой II не обладает потерями (при  $\alpha = 0$ ), выражение можно привести к следующему виду:

$$P_v = \left[ \cos \beta l \cos kd - \frac{m}{m_1} \sin \beta l \sin kd - i \left( \frac{\cos \beta l \sin kd}{m_1} + \frac{\sin \beta l \cos kd}{m} \right) \right]^{-1}.$$

Значения  $P_v$ , полученные по формуле (3.9) при определенных  $kd$ , сведены в табл. 3, где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Табл. 3 и формулы (3.6), (3.7) и (3.9) показывают, что при толщинах слоев, кратных половине длины волны в материале слоя, коэффициент передачи колебательной скорости  $P_v = 1$ . Если полутолщина является один из слоев, коэффициент передачи обусловлен волновыми свойствами лишь другого слоя. Когда толщины обоих слоев нечетны кратны четверти длины волны, значение  $P_v$  равно отношению удель-

акустических сопротивлений материалов первого слоя ко второму. В частности, при  $m_1 = 1$  ( $\rho_1 c_1 = (\rho c)_в$ ) и  $m \approx 30$  (сталь),  $P_v = 1/m \approx 0,03$ .

Если волновое сопротивление слоя I:  $\rho_1 c_1 < (\rho c)_в$ , получим еще меньшую величину коэффициента передачи колебательной скорости. Однако применять четвертьволновый стальной экран нецелесообразно из-за его большой массы. Как показывают расчеты по формулам (2.10), даже тонкая по сравнению с длиной волны стальная пластина обладает достаточно высокой звукоизоляцией. Принимая в формуле (3.9)  $\beta l \ll 1$  и  $m_1 = 1$ , найдем выражение для коэффициента передачи колебательной скорости системы, состоящей из слоя воды и тонкой металлической пластины [32]:

$$|P_v| = |P'_v| = [(\cos kd - m \operatorname{tg} \beta l \sin kd)^2 + \sin^2 kd]^{-1/2}. \quad (3.10)$$

Зависимость  $P_v$  от волнового расстояния в воде  $kd$  до стального листа толщиной  $\beta l$  (рис. 1.15), рассчитанная по формуле (3.10), показывает, что  $P_v$  обладает максимальными и минимальными

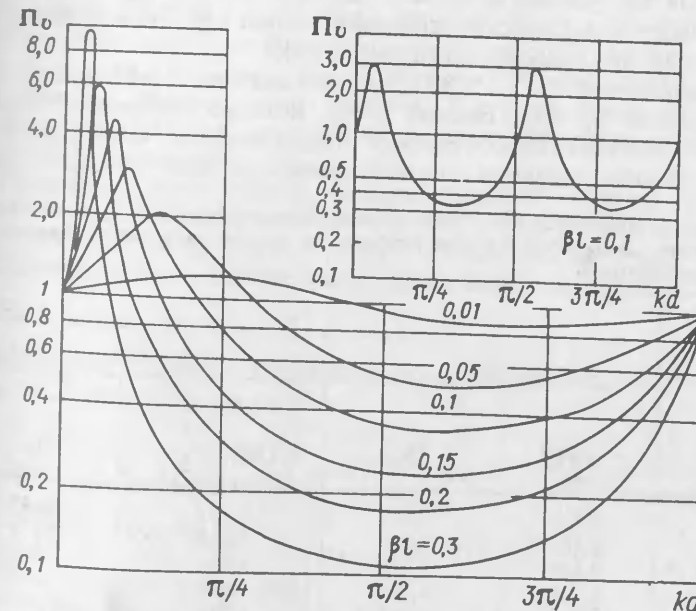


Рис. 1.15. Зависимости коэффициента передачи колебательной скорости  $P_v$  двухслойной системы „вода–металл“ от волновой толщины слоя воды  $kd$  для различных волновых толщин стальной пластины  $\beta l$ .

Таблица 3. Значения  $P_v$  при фиксированных  $kd$  и  $\beta l$  (см. рис. 3.2)

| $kd$                  | $\beta l$                             |   |
|-----------------------|---------------------------------------|---|
|                       | $n\pi$                                | $(2n+1)\frac{\pi}{2}$                       |
| $n\pi$                | 1                                     | $m = \frac{\rho c}{(\rho c)_в}$             |
| $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ | $m_1 = \frac{\rho_1 c_1}{(\rho c)_в}$ | $\frac{m_1}{m} = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c}$ |

значениями. Положение экстремумов определим, продифференцировав выражение (3.10) по  $kd$  и приравняв числитель получившейся производной нулю. При этом получим следующее соотношение:

$$\operatorname{ctg} 2kd = m \operatorname{tg} \beta l / 2. \quad (3.1)$$

Решив уравнение (3.11) графически, найдем, что в области  $kd = 0 \div \pi$  значения  $kd$ , при которых  $\Pi_p$  имеет максимум, лежат в интервале  $0 < (kd)_1 < \pi/4$ , а минимум  $\Pi_p$  наблюдается при  $\pi/2 < (kd)_2 < 3\pi/4$ . В обоих случаях верхняя граница интервала изменения  $kd$  соответствует меньшим значениям  $\beta l$  ( $l_1 < l_2$ ). Величины максимумов и минимумов  $\Pi_p$  определим, подставив соотношение (3.11) в формулу (3.10):

$$|\Pi_p|_{\max} = \operatorname{ctg} (kd)_1 \quad \text{при } 0 < kd < \pi/2; \quad (3.1)$$

$$|\Pi_p|_{\min} = \operatorname{tg} (kd)_1 \quad \text{при } \pi/2 < kd < \pi. \quad (3.1)$$

Результаты расчета по приведенным формулам для  $m = 30$  сведены в табл. 4.

Таким образом, тонкий стальной слой с волновой толщиной  $\beta l = 0,3$  ( $l = \lambda_{\text{ст}}/20$ ), установленный на расстоянии  $kd \approx \pi/2$  от поверхности преобразователя, обеспечивает коэффициент передачи колебательной скорости  $\Pi_p \approx 0,1$  и может эффективно экранировать звук. Поскольку при малых  $kd$  существует область частот, в которой  $\Pi_p > 1$ , система „слой воды – металлическая мембрана” может служить для улучшения согласования преобразователя со средой [5].

Из выражений (3.2) и (3.4) получим значение коэффициента передачи давления  $\Pi_p$  через систему слоев, который определяет величину лепестка характеристики направленности приемника с малым волновым радиусом, расположенного вблизи плоского экранирующего слоя.

Таблица 4. Экстремальные значения коэффициента передачи  $\Pi_p$  через систему из двух слоев „вода-металлическая пластина” и соответствующие им значения при фиксированных  $\beta l$

| $\beta l$ | $\Pi_p$  |         |   |         |
|-----------|----------|---------|---|---------|
|           | max      |         | min   |         |
|           | $(kd)_1$ | $\Pi_p$ | $(kd)_2 = \frac{\pi}{2} = (kd)_1 + \frac{\pi}{2}$ | $\Pi_p$ |
| 0,01      | 0,703    | 1,179   | 2,274   | 0,847   |
| 0,05      | 0,463    | 2,000   | 2,034   | 0,499   |
| 0,10      | 0,293    | 3,315   | 1,864   | 0,302   |
| 0,15      | 0,208    | 4,738   | 1,779   | 0,211   |
| 0,20      | 0,159    | 6,236   | 1,730   | 0,160   |
| 0,25      | 0,128    | 7,770   | 1,699   | 0,129   |
| 0,30      | 0,106    | 9,400   | 1,677   | 0,106   |
| 0,35      | 0,090    | 11,080  | 1,661   | 0,090   |

(см. § 16). Находя отношения  $p_1/p_2$  из формулы (3.2) и  $p_3/p_2$  из формулы (3.4), записываем

$$\Pi_p = p_3/p_1 = (p_3/p_2)(p_2/p_1) = [\cos kd (\operatorname{ch} \gamma l + |\bar{m}| \operatorname{sh} \gamma l) - i m_1 \sin kd \times \left( \operatorname{ch} \gamma l + \frac{\operatorname{sh} \gamma l}{|\bar{m}|} \right)]^{-1}. \quad (3.14)$$

Если слой II не обладает потерями ( $\alpha = 0$ ), выражение (3.14) с учетом формулы (1.12) принимает следующий вид:

$$\Pi_p = \left[ \cos kd (\cos \beta l - i m \sin \beta l) - i m_1 \sin kd \left( \cos \beta l - i \frac{\sin \beta l}{m} \right) \right]^{-1}. \quad (3.15)$$

Значения  $\Pi_p$ , полученные по формуле (3.15) для ряда значений  $kd$  и  $\beta l$ , сведены в табл. 5, где  $n = 0, 1, 2 \dots$ . Сравнение табл. 5 для  $\Pi_p$  с табл. 3 для  $\Pi_v$  показывает, что при  $kd$  и  $\beta l$ , кратных и нечетно кратных  $\pi/2$ , соблюдается следующее соотношение между коэффициентами передачи колебательной скорости и давления:

$$|\Pi_p| |\Pi_v| = 1.$$

В случае  $\beta l = kd = (2n+1)\pi/2$  значения  $\Pi_p > 1$  – если волновое сопротивление слоя II  $\rho c$  больше волнового сопротивления слоя I  $\rho_1 c_1$ ,  $\Pi_p < 1$ , если  $\rho c < \rho_1 c_1$ . Это подтверждает хорошо известное из общей акустики явление, когда давление в стоячей волне минимально на расстоянии  $(2n+1)\pi/2$  от акустически жесткой границы и максимально на самой границе [62].

Рассмотрим коэффициент передачи давления системы, состоящей из тонкой металлической пластины (слой I) и слоя II, выполненного из материала без потерь с  $\rho c < (\rho c)_в$ . Эквивалентная схема системы изображена на рис. 1.16. Значение  $\Pi_p$  определится как

$$\Pi_p = v_3 (\rho c)_в / p.$$

Колебательная скорость  $v_3$  связана с  $v_1$  следующим соотношением:

$$v_3 = v_1 Z_1 / (Z_1 + Z_2),$$

где

$$v_1 = p / Z_{вх}; \quad Z_1 = i \rho c / \sin \beta l;$$

$$Z_2 = (\rho c)_в - i \rho c \operatorname{tg} (\beta l / 2).$$

С использованием этих формул находим

$$\Pi_p = \frac{(\rho c)_в}{Z_{вх}} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Таблица 5. Значения  $\Pi_p$  при фиксированных  $kd$  и  $\beta l$  (см. рис. 3.2)

| $kd$                  | $\beta l$       |   |
|-----------------------|-----------------|---|
|                       | $n\pi$          | $(2n+1)\frac{\pi}{2}$                       |
| $n\pi$                | 1               | $\frac{1}{m}$                               |
| $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ | $\frac{1}{m_1}$ | $\frac{m}{m_1} = \frac{\rho c}{\rho_1 c_1}$ |

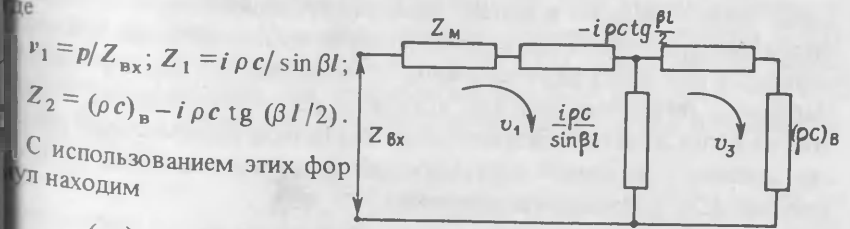


Рис. 1.16. Эквивалентная схема двухслойной системы „металл – податливый слой”

Нетрудно показать, что член  $Z_1/(Z_1 + Z_2)$  равен коэффициенту передачи колебательной скорости через слой II —  $\Pi_v$  [см. формулу (3.7)]. Поскольку для тонкой металлической пластины  $\Pi_v = 1$ , выражение для  $\Pi_p$  запишем в следующем виде:

$$\Pi_p = \frac{\Pi_v''}{Z_{вх}/(\rho c)_в} = \frac{\Pi_v}{R_{вх}/(\rho c)_в + i[(X_{вх}/(\rho c)_в) - (\omega M/(\rho c)_в)]}. \quad (3.16)$$

Импеданс  $Z_{вх}$  состоит из двух слагаемых: инерционного импеданса металлической пластины  $Z_M = -i\omega M = -i\rho_1 c_1 k d$  и сопротивления слоя II, определяемого выражениями (1.29) и (1.30). На резонансе двухслойной системы

$$X_{вх} = X_{ст} + Z_M = 0,$$

что приводит к следующему соотношению:

$$\beta l \frac{\rho_1 d}{\rho l} = \frac{\operatorname{tg} \beta l (1 - m^2)}{m^2 + \operatorname{tg}^2 \beta l}.$$

Если  $\beta l \ll 1$ , это условие записывается как

$$(\beta l)^2 = \frac{\rho_1 d}{\rho l} (1 - m^2) - m^2.$$

При  $m^2 \ll 1$  получаем известное [10, 70] условие резонанса системы „масса—упругость”

$$\omega_p^2 = K/M,$$

где  $K = 1/\rho c^2$  — упругость податливого слоя.

Тогда на резонансе из формулы (3.16) находим

$$\Pi_p = [R_{вх}/(\rho c)_в]^{-1/2},$$

откуда следует, что коэффициент передачи давления больше единицы, а в случае, когда резонанс системы совпадает с четвертьволновым резонансом слоя II,  $\Pi_p = 1/m$ .

Выше резонанса значение  $\Pi_p$  определяется полным импедансом  $Z_{вх}/(\rho c)_в$  [см. формулу (3.16)], и при увеличении инерционного члена становится меньше единицы.

Рассмотрение свойств среды, состоящей из трех и более слоев, аналитически можно проводить на основании тех же соотношений, которые были положены в основу анализа двухслойной системы. Одно выражение для расчета получают громоздкими и трудными для использования. Существует ряд возможностей, позволяющих упростить задачу. Например, легко показать, что, исходя из равенства активных мощностей на входе и выходе системы слоев без потерь, колебательные скорости связаны с активной составляющей входного импеданса системы (см. рис. 3.2) следующим выражением:

$$|v_3/v_1|^2 = |\Pi_v|^2 = R_{вх}/(\rho c)_в \text{ при } Z_H = (\rho c)_в. \quad (3.17)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для большего числа слоев.

В случае сред с потерями связь  $\Pi_v$  и  $R_{вх}/(\rho c)_в$  более сложна. В частности, для одного слоя на основании выражений (3.7) и (1.25) находим

$$|\Pi_v|^2 = \frac{R_{вх}}{(\rho c)_в} \frac{m}{\operatorname{ch}^2 al (m + \operatorname{th} al) (1 + m \operatorname{th} al)}. \quad (3.18)$$

При  $al > 2$  с учетом соотношения (1.51) получаем

$$|\Pi_v| = m/\operatorname{ch} al (1 + m). \quad (3.19)$$

Формула (3.19) показывает, что в случае, когда входной импеданс слоя уже не зависит от его толщины, коэффициент передачи колебательной скорости через слой  $\Pi_v$  имеет конечную величину, не равную нулю. Это объясняется тем, что  $\Pi_v$  определяется только волной, идущей в прямом направлении, в то время как  $Z_{ст}$  управляется также волной, отраженной от задней границы слоя и интерферирующей с падающей волной. Если увеличить толщину слоя, например, в 2 раза ( $al = 4$ ), то отношение

$$|\Pi_v| (al = 4) / |\Pi_v| (al = 2) = \operatorname{ch} 2 / \operatorname{ch} 4$$

очень мало, а  $|\Pi_v| (al = 4) \rightarrow 0$ .

Определение реактивной составляющей входного импеданса двухслойной системы  $Z_{вх}$  можно провести методом, развитым в работе [1]. Используя формулы (1.15), (1.22), (1.28) и (2.5), в обозначениях рис. 1.14 найдем следующее выражение для  $Z_{вх}$ :

$$Z_{вх} = R_{вх} + iX_{вх} = \rho_1 c_1 (1 + |r| e^{i\psi_1}) / (1 - |r| e^{i\psi_2}), \quad (3.20)$$

где

$$\psi_1 = 2kd + \varphi; \quad (3.21)$$

$$R_{вх} = \rho_1 c_1 (1 - |r|^2) / (1 - 2|r| \cos \psi_1 + r^2); \quad (3.22)$$

$$X_{вх} = \rho_1 c_1 (2|r| \sin \psi_1) / (1 - 2|r| \cos \psi_1 + r^2); \quad (3.23)$$

$$|r| = |(Z_{ст} - \rho_1 c_1) / (Z_{ст} + \rho_1 c_1)|. \quad (3.24)$$

Из формулы (3.22) следует, что активная составляющая входного импеданса двух слоев является осциллирующей функцией  $\psi_1$  (3.21) с экстремумами: при  $\psi_1 = 2n\pi$ , когда

$$R_{вх} = \rho_1 c_1 (1 + |r|) / (1 - |r|),$$

и при  $\psi_1 = (2n + 1)\pi$ , когда

$$R_{вх} = \rho_1 c_1 (1 - |r|) / (1 + |r|); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В первом случае наблюдается максимум, а во втором — минимум  $R_{вх}$  (при ненулевом  $|r|$ ). Реактивная составляющая импеданса (3.23) в обоих случаях проходит через нуль (рис. 1.17). На рисунках в правом верхнем углу показан ход зависимостей  $R_{вх}/\rho_1 c_1$  и  $X_{вх}/\rho_1 c_1$  при  $0 \leq \psi_1 \leq 360^\circ$ . Положение первого максимума  $R_{вх}/\rho_1 c_1$  определяется соотношением

$$2kd + \varphi = 0,$$

положение первого минимума

$$2kd + \varphi = \pi.$$

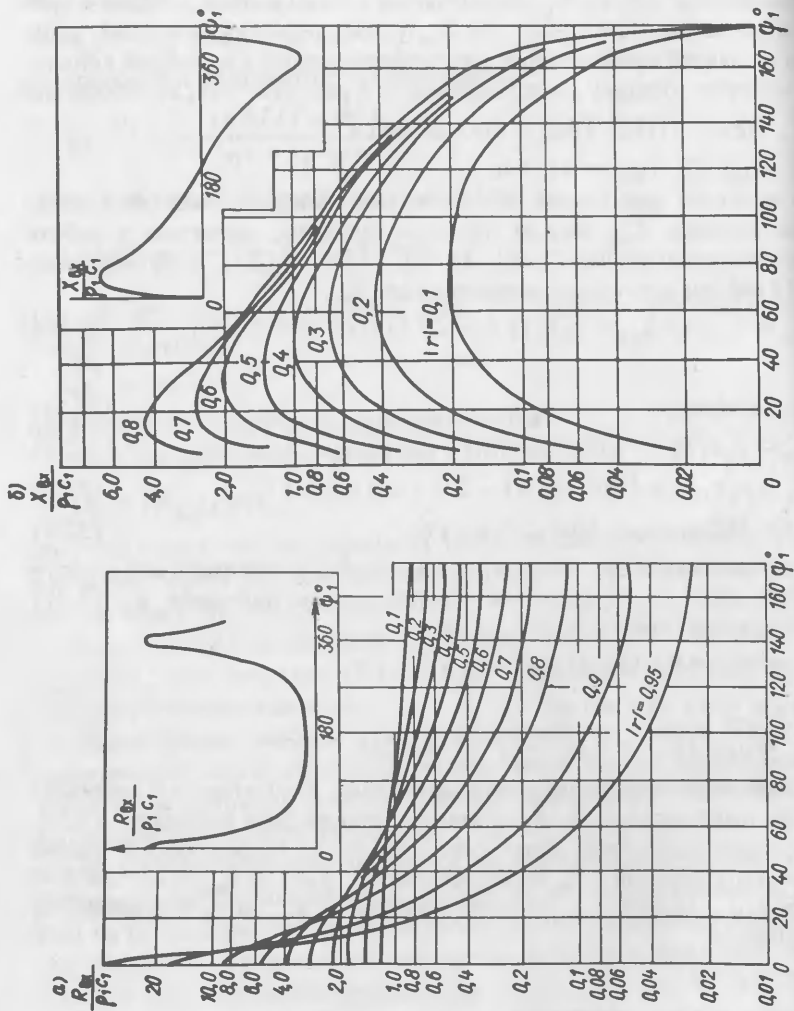


Рис. 1.17. Зависимость удельных величин активной (а) и реактивной (б) составляющих входного импеданса двухслойной системы от набега фазы  $\psi_1 = 2kd + \varphi$ .

Числами на кривых указан модуль коэффициента отражения от слоя II.

Таким образом, акустические параметры рассматриваемой системы (см. рис. 1.14) определяются как волновой толщиной слоя  $I$ , так и модулем и фазой коэффициента отражения от слоя  $II$ . Кривые рис. 1.17,  $a$  являются более общими, чем функции  $\Pi_v$ , построенные для частного случая двухслойной системы „вода—тонкая металлическая пластина” (см. рис. 1.15). Учитывая связь (3.17) коэффициента передачи колебательной скорости  $\Pi_v$  с удельной величиной относительной активной составляющей входного импеданса системы слоев  $R_{вх}/(\rho c)_в$ , этими графиками можно пользоваться при расчете слоев любой волновой толщины, выполненных из материалов с произвольным акустическим сопротивлением. Кроме того, выражения (3.20) — (3.24) и графики, приведенные на рис. 1.17, могут оказаться полезными и при упрощенной оценке параметров системы, состоящей из большего, чем два, числа слоев. Для этого достаточно только определить модуль и фазу коэффициента отражения от оконечного слоя, что при помощи формул (2.6) — (2.7) легко выполняется, а затем, переходя от слоя к слою и применяя формулы (3.20) — (3.24), найти входной импеданс и связанные с ним другие характеристики системы. Однако в случае среды, состоящей из чередующихся слоев, может быть применен и более простой метод расчета.

#### § 4. Акустические характеристики среды, состоящей из чередующихся слоев

В экранирующих устройствах могут использоваться среды, представляющие собой набор из чередующихся тонких металлических пластин и слоев из акустически податливых материалов (например, резин с полостями) [148, 149, 157, 178]. Оценка акустических свойств многослойных экранов может быть проведена на основе теории мелкослоистой среды [14, 20, 104, 105, 132, 133], которая в случае, когда толщины чередующихся слоев малы по сравнению с длиной продольной волны, позволяет рассчитать усредненные параметры среды при распространении звука в направлении оси  $x$  (рис. 1.18). Если воспользоваться обозначениями рис. 1.18, то в соответствии с работами [14, 105] можно записать

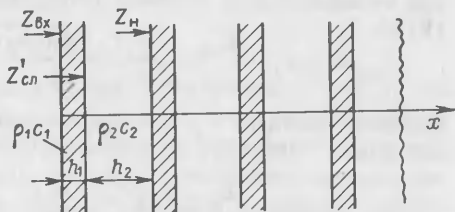


Рис. 1.18. Полубезграничная среда, состоящая из чередующихся слоев.

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h_1 + h_2}; \quad (4.1)$$



$$\tilde{\rho}\tilde{c}^2 = (h_1 + h_2) \left( \frac{h_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} + \frac{h_2}{\lambda_2 + 2\mu_2} \right)^{-1}, \quad (4.2)$$

где  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{c}$  – усредненные плотность и скорость рассматриваемой среды

$$\lambda_1 + 2\mu_1 = \rho_1 c_1^2; \quad \lambda_2 + 2\mu_2 = \rho_2 c_2^2 \quad (4.3)$$

– продольные модули упругости материалов, из которых выполнен слой. С учетом формул (4.1) – (4.3) находим

$$(\tilde{\rho}\tilde{c}/\rho_1 c_1)^2 = m^2 \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{m^2 \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}, \quad (4.4)$$

где

$$m = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1. \quad (4.5)$$

Строгим способом отыскания волнового числа  $k$  в среде при произвольных толщинах чередующихся слоев является решение дисперсионного уравнения, приведенного в работе [105], которое запишем в несколько ином виде

$$\cos \tilde{k}(h_1 + h_2) = \cos k_1 h_1 \cos k_2 h_2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \right) \sin k_1 h_1 \sin k_2 h_2, \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{k} = \omega / \tilde{c}; \quad k_1 = \omega / c_1; \quad k_2 = \omega / c_2.$$

При  $k_1 h_1 \ll 1$  и  $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$  уравнение (4.5) переходит в следующее:

$$\cos \tilde{k}(h_1 + h_2) = \cos k_2 h_2 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{M_1}{M_2} k_2 h_2 \operatorname{tg} k_2 h_2 \right).$$

где  $M_1 = \rho_1 h_1$ ;  $M_2 = \rho_2 h_2$  – массы слоев на единицу их площади

Можно предложить более простой, приближенный метод расчета акустических свойств таких сред [33]. Рассмотрим полубесконечную слоистую систему, также состоящую из чередующихся слоев без учета с теми же параметрами, что и в предыдущем случае. Определим входной импеданс такой системы на основании формулы (1.28):

$$Z_{вх} = \rho_1 c_1 \frac{Z'_{сл} - i \rho_1 c_1 \operatorname{tg} k_1 h_1}{\rho_1 c_1 - i Z'_{сл} \operatorname{tg} k_1 h_1}.$$

Входной импеданс  $Z'_{сл}$  в свою очередь может быть записан аналогичным образом:

$$Z'_{сл} = \rho_2 c_2 \frac{Z_n - i \rho_2 c_2 \operatorname{tg} k_2 h_2}{\rho_2 c_2 - i Z_n \operatorname{tg} k_2 h_2},$$

где  $Z_n$  – входной импеданс рассматриваемой системы без учета двух слоев.

Вследствие бесконечной протяженности слоистой системы вдоль оси  $x$

$$Z_n = Z_{вх}. \quad (4.11)$$

Подставив в формулу (4.9) равенство (4.10), с учетом соотношений (4.5) и (4.11) получим следующее уравнение для определения  $Z_{вх}$ :

$$\left( \frac{Z_{вх}}{\rho_1 c_1} \right)^2 (\operatorname{tg} k_2 h_2 + i m \operatorname{tg} k_1 h_1) + \frac{Z_{вх}}{\rho_1 c_1} \operatorname{tg} k_1 h_1 \operatorname{tg} k_2 h_2 (1 - m^2) - (m \operatorname{tg} k_2 h_2 + i \operatorname{tg} k_1 h_1) = 0. \quad (4.12)$$

Введем обозначение

$$Z_{вх} / \rho_1 c_1 = R + iX. \quad (4.13)$$

После подстановки формулы (4.13) в уравнение (4.12) и приравняв нулю по отдельности вещественной и мнимой частей получившееся выражения, находим значения  $R$  и  $X$ :

$$R = \left\{ -\frac{1}{4} \left[ \frac{\operatorname{tg} k_1 h_1 \operatorname{tg} k_2 h_2 (1 - m^2)}{m \operatorname{tg} k_1 h_1 + \operatorname{tg} k_2 h_2} \right]^2 + \frac{m (\operatorname{tg} k_1 h_1 + m \operatorname{tg} k_2 h_2)}{m \operatorname{tg} k_1 h_1 + \operatorname{tg} k_2 h_2} \right\}^{1/2}; \quad (4.14)$$

$$X = -\frac{\operatorname{tg} k_1 h_1 \operatorname{tg} k_2 h_2 (1 - m^2)}{2(m \operatorname{tg} k_1 h_1 + \operatorname{tg} k_2 h_2)}. \quad (4.15)$$

По аналогии с однородной полубезграничной средой, входной импеданс которой равен ее волновому сопротивлению, примем

$$|Z_{вх}| = |\tilde{\rho}\tilde{c}|. \quad (4.16)$$

Определив плотность среды  $\tilde{\rho}$  по формуле (4.1), из равенства (4.16) найдем модуль скорости  $|\tilde{c}|$ :

$$|\tilde{c}| = \frac{|Z_{вх}|}{\tilde{\rho}} = \frac{\rho_1 c_1}{\tilde{\rho}} \sqrt{R^2 + X^2}. \quad (4.17)$$

Используя формулы (4.14), (4.15) и (4.17), получим

$$\left( \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}}{\rho_1 c_1} \right)^2 = m^2 \frac{\operatorname{tg} k_1 h_1}{m \operatorname{tg} k_1 h_1 + \operatorname{tg} k_2 h_2} + \operatorname{tg} k_2 h_2. \quad (4.18)$$

Если в этом выражении положить  $\operatorname{tg} k_1 h_1 = k_1 h_1$ ;  $\operatorname{tg} k_2 h_2 = k_2 h_2$ , то оно перейдет в формулу (4.4), полученную для случая мелкослоистой среды. Поскольку требования тонкости слоев по сравнению с длинами волн сжатия даже при большой разности параметров обоих материалов, являются особенно жесткими [105], остановимся на анализе акустических свойств среды в случае тонких металлических пластин, чередующихся со слоями из акустически податливых материалов, т. е. при  $k_1 h_1 \ll 1$  и  $\rho_1 c_1 \gg \rho_2 c_2$  ( $m \ll 1$ ), а также при условии  $\operatorname{tg} k_2 h_2 \gg m \operatorname{tg} k_1 h_1$ , которое удовлетворяется при всех  $k_2 h_2$  до  $k_1 h_1 < \pi/2$ .

Тогда из формул (4.14), (4.15) и (4.17) находим

$$R = \left[ -\left( \frac{k_1 h_1}{2} \right)^2 + m \left( 1 + \frac{M_1}{M_2} k_2 h_2 \operatorname{ctg} k_2 h_2 \right) \right]^{1/2}; \quad (4.19)$$

$$X = -0,5 k_1 h_1; \quad (4.20)$$

$$|\tilde{c}| = \frac{\rho_2 c_2}{\tilde{\rho}} \left[ 1 + \frac{M_1}{M_2} k_2 h_2 \operatorname{ctg} k_2 h_2 \right]^{1/2}. \quad (4.21)$$

Из последней формулы получаем

$$\frac{|\tilde{c}|}{c_2} = \frac{1 + h_1/h_2}{1 + M_1/M_2} \left( 1 + \frac{M_1}{M_2} k_2 h_2 \operatorname{ctg} k_2 h_2 \right)^{1/2}. \quad (4.22)$$

Анализ формул (4.18) и (4.22) показывает следующее:

а) при  $k_2 h_2 \rightarrow 0$

$$\frac{\tilde{c}}{c_2} = \frac{1 + h_1/h_2}{(1 + M_1/M_2)^{1/2}}; \quad \tilde{\rho}\tilde{c} = \rho_1 c_1,$$

т. е. скорость в среде определяется отношением толщин и масс слоев, а волновое сопротивление  $\tilde{\rho}\tilde{c}$  совпадает с волновым сопротивлением материала металлических слоев;

б) при  $k_2 h_2 = \pi/2$

$$\frac{\tilde{c}}{c_2} = \frac{1 + h_1/h_2}{1 + M_1/M_2}; \quad \tilde{\rho}\tilde{c} = \rho_2 c_2,$$

т. е. скорость в среде уменьшается, а волновое сопротивление становится равным волновому сопротивлению податливого слоя;

в) при  $M_2/M_1 = -k_2 h_2 \operatorname{ctg} k_2 h_2$

$$\frac{\tilde{c}}{c_2} = 0; \quad \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}}{\rho_2 c_2} = \frac{\operatorname{tg} k_1 h_1 - k_1 h_1}{m^2 \operatorname{tg} k_1 h_1 - k_1 h_1} \rightarrow 0,$$

т. е. существует такое соотношение между массами чередующихся слоев и волновой толщиной податливого слоя  $(k_2 h_2)_0$ , когда скорость в среде и ее волновое сопротивление становятся равными нулю. В области  $(k_2 h_2)_0 \leq k_2 h_2 < \pi$  скорость  $\tilde{c}$  принимает чисто мнимые значения, и волна в среде не распространяется.

С дальнейшим увеличением  $k_2 h_2$  картина изменения  $\tilde{c}$  и  $\tilde{\rho}\tilde{c}$  будет повторяться.

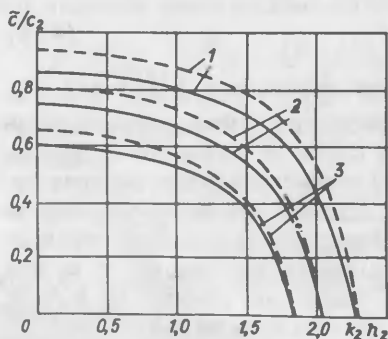


Рис. 1.19. Изменение скорости в среде, состоящей из чередующихся слоев, в зависимости от волновой толщины податливого слоя  $k_2 h_2$ .

1 —  $M_1/M_2 = 0,5$ ; 2 —  $M_1/M_2 = 1$ ; 3 —  $M_1/M_2 = 2,0$ ; — — —  $h_1/h_2 = 0,05$ ; — — —  $h_1/h_2 = 0,15$ .

На рис. 1.19 построены зависимости  $\tilde{c}/c_2$  от  $k_2 h_2$  для ряда значений  $M_1/M_2$  и  $h_1/h_2$ . Видно, что чем больше отношение масс слоев  $M_1/M_2$ , тем при меньших  $k_2 h_2$  значение  $\tilde{c}$  становится равным нулю.

Рассмотрим теперь аналогичную среду, состоящую из конечного числа  $n$  двойных слоев общей толщиной  $L = n(h_1 + h_2)$ . Если число слоев велико, то входной импеданс определяем как для однородного слоя. Будем интересоваться активной составляющей импеданса

$$\frac{R_{вх}}{(\rho c)_{в}} = \left[ \frac{\tilde{\rho} \tilde{c}}{(\rho c)_{в}} \right]^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \tilde{k} L}{\left[ \frac{\tilde{\rho} \tilde{c}}{(\rho c)_{в}} \right]^2 + \operatorname{tg}^2 \tilde{k} L}, \quad (4.23)$$

где  $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$  — усредненное волновое число в среде из чередующихся слоев. Рис. 1.20 иллюстрирует совпадение характеристик  $R_{вх}/(\rho c)_{в}$ , рассчитанных по точной теории слоистых систем [14] (сплошные кри-

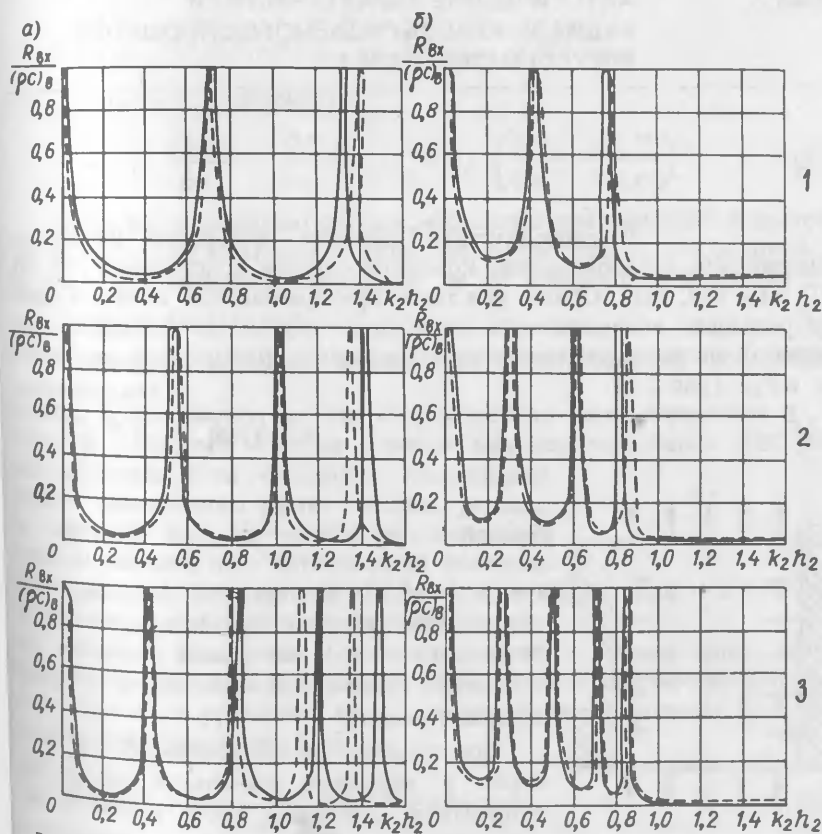


Рис. 1.20. Удельная активная составляющая входного импеданса среды конечной толщины, состоящей из чередующихся слоев: а —  $h_1/h_2 = 0,1$ ; б —  $h_1/h_2 = 0,4$ .

1 — число пар слоев  $n = 3$ ; 2 —  $n = 4$ ; 3 —  $n = 5$ .

вые) и по формуле (4.23) (пунктирные кривые), причем, с увеличением числа двойных слоев  $n$  результаты практически совпадают. Из рассмотрения рисунка можно заметить, что максимумы характеристики  $R_{вх}/(\rho c)_в$  группируются в области  $0 < k_2 h_2 < (k_2 h_2)_0$ , а при  $k_2 h_2 > (k_2 h_2)_0$  величина  $R_{вх}/(\rho c)_в = 0$ , поскольку, как отмечалось, звуковая волна в среде не распространяется, а  $\tilde{c}$ , как и  $\tilde{\rho c}$  равны нулю.

Таким образом, предложенный приближенный метод расчета позволяет с хорошей точностью оценивать акустические характеристики экранов, состоящих из ограниченного по толщине набора чередующихся слоев из податливого материала и тонких металлических пластин.

Глава 2.

## АКУСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАДИАЛЬНО ВОЗБУЖДАЕМОГО СПЛОШНОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА

В гидроакустике широкое применение нашли цилиндрические преобразователи компенсированной конструкции [93, 96, 110, 116, 173, 185]. Общим для таких преобразователей является наличие радиально возбуждаемого сплошного упругого (в частном случае водного) цилиндра, нагруженного по торцам импедансами излучения  $Z_I$  и  $Z_{II}$  (рис. 2.1).

В настоящей главе на основе результатов, полученных в работе [34, 35], приводится решение задачи о входном импедансе боковой

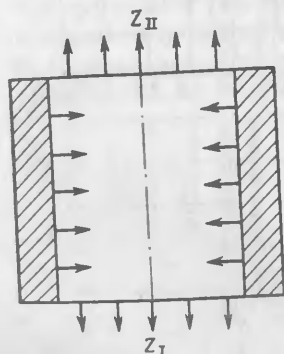


Рис. 2.1. Цилиндрический преобразователь с радиально возбуждаемой внутренней полостью.

поверхности радиально возбуждаемого цилиндра; найдено также соотношение колебательных скоростей на его боковой торцевой поверхностях. Это решение используется в § 17 при расчете характеристик цилиндрического преобразователя с учетом излучения из его внутренней полости, выполненной средой с произвольным коэффициентом Пуассона.

При решении задачи возникают по сравнению с плоскими слоистыми системами особенности, связанные как с видом функций, являющихся решением волнового уравнения в цилиндрической системе координат, так и с конечностью высоты цилиндра.

## § 5. Бесконечный цилиндр и тонкий диск

Пусть сплошной цилиндр радиуса  $a$ , выполненный из упругого материала с параметрами  $\lambda$  и  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , возбуждается радиально. Найдем вначале удельный входной акустический импеданс боковой поверхности бесконечно длинного цилиндра (соответствующего цилиндру конечной высоты, нагруженного на торцах импедансами  $Z_I = Z_{II} = \infty$ ) и свободного от напряжений на торцах ( $Z_I = Z_{II} = 0$ ) тонкого диска. Запишем уравнения движения при аксиально симметричных колебаниях цилиндра в форме Похгаммера [85]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z}; \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2\mu \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\theta), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\rho$  — плотность материала,

$$\Delta = 1/r \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \omega_\theta = 0,5 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right). \quad (5.2)$$

Здесь и в дальнейшем считаем, что радиальное смещение  $u$  постоянно по высоте во всем объеме цилиндра, в том числе на его боковой поверхности, а аксиальное смещение  $w$  не зависит от радиуса  $r$ , т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (5.3)$$

Определим удельный входной импеданс боковой поверхности цилиндра как

$$Z_{вх} = \sigma_r / \dot{u} \text{ при } r = a, \quad (5.4)$$

где

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda (u/r + \partial w / \partial z) \quad (5.5)$$

— радиальная составляющая механического напряжения;  $\dot{u} = -i \omega u$  — радиальная колебательная скорость.

В случае бесконечно длинного цилиндра решаем задачу теории упругости о плоской деформации [18]. При этом достаточно использовать первое из уравнений (5.1), которое с учетом условия (5.3) преобразуется к уравнению Бесселя:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial u}{\partial r} - u/r^2 + k_1^2 u = 0. \quad (5.6)$$

Решением уравнения (5.6) будет функция

$$u = C J_1(k_1 r), \quad (5.7)$$

где  $J_1(k_1 r)$  — функция Бесселя первого рода,

$$k_l = \omega/c_l = [\omega^2 \rho / (\lambda + 2\mu)]^{1/2} \quad (5.8)$$

— волновое число для продольных волн в безграничной упругой среде;  
 $c_l$  — скорость продольных волн.

Заметим, что

$$2\mu / (\lambda + 2\mu) = (1 - 2\nu) / (1 - \nu). \quad (5.9)$$

Выражение (5.4) с учетом соотношений (5.5), (5.7), (5.8) и (5.9) принимает следующий вид:

$$Z_{вх} = Z_l = i \rho c_l \left[ \frac{J_0(k_l a)}{J_1(k_l a)} - \frac{(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)} \frac{1}{k_l a} \right]. \quad (5.10)$$

На рис. 2.2 приведены зависимости  $Z_l / \rho c_l$  от  $k_l a$ , построенные на основании формулы (5.10) для  $\nu_1 = 0$  и  $\nu_2 = 0,5$ . Значения  $Z_l / \rho c_l$  для  $0 < \nu < 0,5$  лежат между этими кривыми.

В случае тонкого диска, т. е. весьма короткого цилиндра, такою что нормальное напряжение  $\sigma_z$ , а также касательные напряжения  $\tau_{r\theta}$  и  $\tau_{r\theta}$  можно принять равными нулю по всему объему цилиндра, включая его торцы, задача сводится к рассмотрению плоского напряженного состояния упругого цилиндра [18], а уравнения движения преобразуются к следующей форме:

$$\partial^2 u / \partial r^2 + 1/r \frac{\partial u}{\partial r} - u/r^2 + k_L^2 u = 0, \quad (5.11)$$

где

$$k_L = \frac{\omega}{c_L} = \left[ \frac{\omega^2 \rho}{E(1 - \nu^2)} \right]^{1/2} \quad (5.12)$$

— волновое число для упругих продольных волн в тонкой пластинке;  $c_L$  — скорость соответствующих волн;  $E$  — модуль Юнга.

Решением уравнения (5.11) является функция

$$u = D J_1(k_L r). \quad (5.13)$$

Радиальное напряжение в случае тонкого круглого диска определяется в соответствии с [80] как

$$\sigma_r = \lambda' (\partial u / \partial r + u/r) + 2\mu (\partial u / \partial r), \quad (5.14)$$

где  $\lambda' = E\nu / (1 - \nu^2)$ .

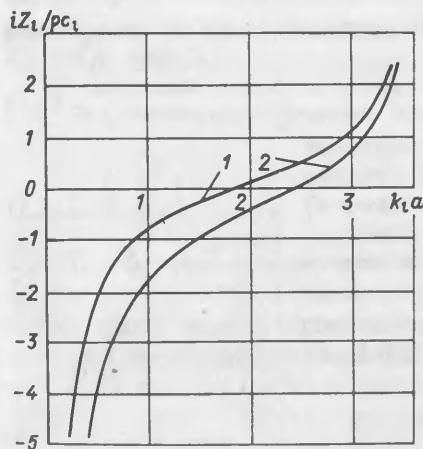


Рис. 2.2. Зависимости входного импеданса боковой поверхности радиально возбуждаемого бесконечно длинного цилиндра от волнового радиуса, построенные для  $\nu = 0$  (кривая 1) и  $\nu = 0,5$  (кривая 2).

С учетом соотношений (5.13)  $k_1 a)_{рез}$  и (5.14) выражение (5.4) принимает следующий вид:

$$Z_{вх} = Z_L = i \rho c_L \times \left[ \frac{J_0(k_L a)}{J_1(k_L a)} - \frac{(1-\nu)}{k_L a} \right]. \quad (5.15)$$

Формулы (5.10) и (5.15) показывают, что импедансы бесконечно длинного и очень короткого (со свободными от напряжений торцами) цилиндров, выполненных из материалов без потерь, являются чисто мнимыми величинами.

При определенных волновых коэффициентах Пуассона для бесконечно длинного цилиндра (кривая 1) и для тонкого диска (кривая 2) наблюдается резонанс, когда  $Z_{вх} = 0$ . Волновые радиусы цилиндров на резонансе находим из следующих соотношений:

$$k_1 a \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}; \quad k_L a \frac{J_0(k_L a)}{J_1(k_L a)} = 1-\nu. \quad (5.16)$$

На рис. 2.3 представлены построенные на основании выражений (5.16) зависимости  $k_1 a$  и  $k_L a$  от коэффициента Пуассона  $\nu$ , причем  $k_L$  пересчитано к величине  $k_1$  по формуле

$$k_L = k_1 (1-\nu) (1-2\nu)^{-1/2}.$$

При малых  $\nu$  значения резонансных волновых радиусов практически совпадают. С увеличением  $\nu$  наблюдается заметное расхождение кривых, что естественно, так как при  $\nu \rightarrow 0,5$  модуль упругости бесконечного цилиндра  $E(1-\nu)/[(1+\nu)(1-2\nu)]$  значительно выше модуля  $E/(1-\nu^2)$  для тонкой пластинки.

Таким образом, входной импеданс радиально возбуждаемого цилиндра при плоском деформированном (бесконечно длинный цилиндр) и плоском напряженном (тонкий диск) состояниях зависит от волнового радиуса цилиндра, коэффициента Пуассона и волнового сопротивления материала.

## § 6. Бесконечно длинный цилиндр с внутренним цилиндрическим стержнем

Управление входным импедансом радиально возбуждаемого бесконечно длинного цилиндра радиуса  $b$  возможно путем размещения на его оси стержня с радиусом  $a$ , выполненного из

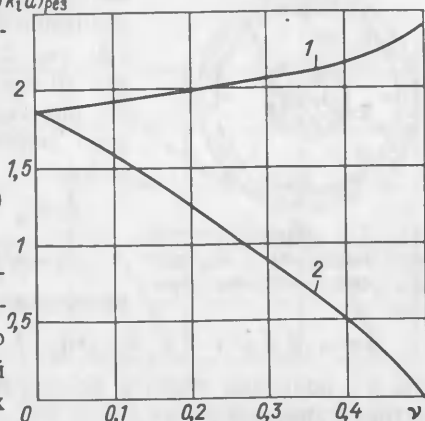


Рис. 2.3. Зависимости резонансного значения волнового радиуса  $(k_1 a)_{рез}$  от коэффициента Пуассона для бесконечно длинного цилиндра (кривая 1) и для тонкого диска (кривая 2).

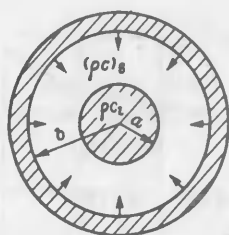


Рис. 2.4. Цилиндрический преобразователь с внутренним цилиндрическим стержнем.

материала, обладающего в общем случае произвольным волновым сопротивлением  $\rho c_1$  (см. рис. 2.4). В предположении, что промежуток  $(b - a)$  заполнен водой, найдем выражение для входного импеданса такого композитного цилиндра. Запишем граничные условия задачи:

$$1) Z_{\text{н}} = Z_1 \text{ при } r = a; \quad (6.1)$$

$$2) -p/v = Z_{\text{вх}} \text{ при } r = b. \quad (6.2)$$

Решение для потенциала скорости ищем в виде

$$\Phi = A_1 J_0(kr) + B_1 N_0(kr), \quad (6.3)$$

где  $k$  — волновое число в воде. Используя выражения (1.2) и (6.3), находим значения  $p$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} p &= -i \omega \rho_{\text{в}} [A_1 J_0(kr) + B_1 N_0(kr)]; \\ v &= k [A_1 J_1(kr) + B_1 N_1(kr)], \end{aligned} \quad (6.4)$$

подставив которые в граничное условие (6.2), получим

$$Z_{\text{вх}} = i (\rho c)_{\text{в}} \frac{[J_0(kb) + B_1/A_1 \cdot N_0(kb)]}{[J_1(kb) + B_1/A_1 \cdot N_1(kb)]}. \quad (6.5)$$

Отношение  $B_1/A_1$  найдем из граничного условия (6.1)

$$B_1/A_1 = - \frac{[Z'_1 J_1(ka) - i J_0(ka)]}{[Z'_1 N_1(ka) - i N_0(ka)]}, \quad (6.6)$$

где  $Z'_1 = Z_1 / (\rho c)_{\text{в}}$ .

С использованием формул (6.5) и (6.6) получим выражение для входного импеданса композитного цилиндра при произвольной нагрузке

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{(\rho c)_{\text{в}}} = i \frac{J_0(kb) - N_0(kb) \frac{Z'_1 J_1(ka) - i J_0(ka)}{Z'_1 N_1(ka) - i N_0(ka)}}{J_1(kb) - N_1(kb) \frac{Z'_1 J_1(ka) - i J_0(ka)}{Z'_1 N_1(ka) - i N_0(ka)}}. \quad (6.7)$$

Для анализа ограничимся частным случаем, потребовав, чтобы

$$\frac{Z_{\text{вх}}}{(\rho c)_{\text{в}}} = 0. \quad (6.8)$$

Из формулы (6.7) получим условие, которому при этом должен удовлетворять входной импеданс стержня радиуса  $a$ :

$$Z'_1 = i \frac{N_0(ka)}{N_1(ka)} \frac{J_0(ka)/N_0(ka) - J_0(kb)/N_0(kb)}{J_1(ka)/N_1(ka) - J_0(kb)/N_0(kb)}. \quad (6.9)$$

Если стержень абсолютно жесткий ( $Z'_1 = \infty$ ), из формулы (6.9) находим, что условие (6.8) выполняется при соблюдении следующего равенства:

$$\begin{aligned} J_1(ka) / N_1(ka) &= \\ &= J_0(kb) / N_0(kb). \end{aligned} \quad (6.10)$$

На рис. 2.5 построены зависимости отношений  $J_0(y) / N_0(y)$  и  $J_1(y) / N_1(y)$  от  $y$ . Учитывая, что в соответствии с постановкой задачи  $kb > ka$ , при изменении  $y$  от 0 до 4 рассматриваем только нижние ветви кривых. Из графика определяем зависимость  $k(b-a)$  от волнового радиуса  $ka$  (рис. 2.6). Видно, что входной импеданс цилиндрического слоя воды, нагруженного на абсолютно жесткий цилиндрический стержень, равен нулю при зазорах  $k(b-a)$ , отличающихся от случая плоского слоя, нагруженного на жесткую стенку, когда нулевой входной импеданс наблюдается при волновой толщине слоя, равной  $\pi/2$ .

С увеличением волнового радиуса  $kb$  в соответствии с характером изменения функций Бесселя и Неймана, которые при больших аргументах аппроксимируются косинусом и синусом, положение нулей импеданса цилиндрического слоя, нагруженного на жесткий стержень, начинает совпадать со случаем плоского слоя.

Если внутренний стержень выбрать абсолютно податливым, то в соответствии с формулой (6.9) условие (6.8) выполняется при соблюдении другого соотношения:

$$\begin{aligned} J_0(ka) / N_0(ka) &= \\ &= J_0(kb) / N_0(kb). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Анализ показывает, что входной импеданс цилиндрического слоя воды, нагруженного на абсолютно податливый цилиндрический стержень, мало отличается от импеданса плоского слоя.

Выражение (6.9) позволяет выбирать оптимальный импеданс и радиус цилиндрического экрана, обеспечивающие минимальный входной импеданс для заданного

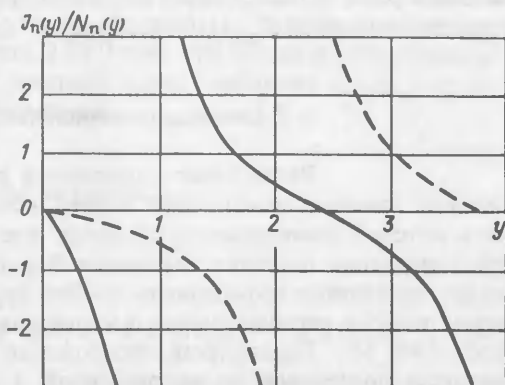


Рис. 2.5. Зависимость отношений цилиндрических функций Бесселя и Неймана от аргумента.  
—  $J_1(y) / N_1(y)$ ; ----  $-J_0(y) / N_0(y)$ .

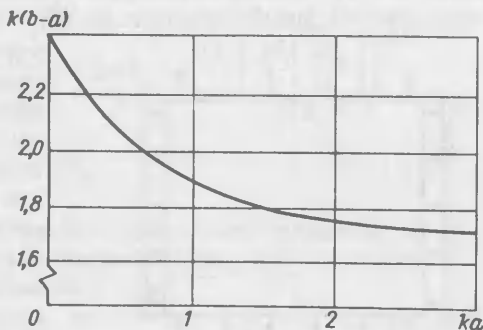


Рис. 2.6. Зависимость волновой толщины зазора, обеспечивающей нуль входного импеданса, от волнового радиуса внутреннего цилиндрического стержня.



внешнего радиуса  $kb$ . В общем случае следует искать условие минимума входного импеданса  $Z_{вх}/(\rho c)_в$ , пользуясь формулой (6.7).

## § 7. Цилиндр конечной высоты

Рассмотрим однородный сплошной упругий цилиндр конечной высоты, помещенный внутри цилиндрической обоймы, жесткость которой значительно превосходит жесткость цилиндра (рис. 2.7). При вычислении входного импеданса боковой поверхности такого цилиндра появляется возможность обойти трудности, связанные с получением точного решения задачи о колебаниях цилиндров конечных размеров [44, 46]. Предполагая, что боковая поверхность цилиндра возбуждается постоянной по высоте силой, а для отношения высоты цилиндра к радиусу  $h/a > 1$  в области до его первого радиального резонанса аксиальное смещение на торцах  $w$  слабо зависит от радиуса  $r$  [125, 159], при решении можно пользоваться условием (5.3). Примем также, что при трансформации радиальных колебаний в продольные торцы цилиндра колеблются как односторонние плоские поршни, нагруженные импедансом излучения  $Z_T = Z_I = Z_{II}$ . Если торцы контактируют с водой, то  $Z_T$  можно записать как

$$Z_T/(\rho c)_в = R_T/(\rho c)_в - i X_T/(\rho c)_в, \quad (7.1)$$

где  $R_T/(\rho c)_в$  и  $X_T/(\rho c)_в$  — безразмерные удельные коэффициенты активной и реактивной составляющих сопротивления излучения. Основываясь на результатах работы [71], для цилиндра с  $h/a > 1$  принимаем, что значение  $Z_T$  соответствует сопротивлению излучения плоского одностороннего поршня без экрана. В дальнейшем при численных расчетах использованы значения импеданса поршня, полученные Л. Я. Гутиным [50]. Другое предположение касается волнового числа  $k = \omega/c$ , характеризующего колебания цилиндра вдоль оси  $Z$ . В работе [158] значение  $k$  определено на основании теории распространения звука в трубе малого диаметра, заполненной водой, что для произвольного радиуса преобразователя не является строгим. Предполагая, что

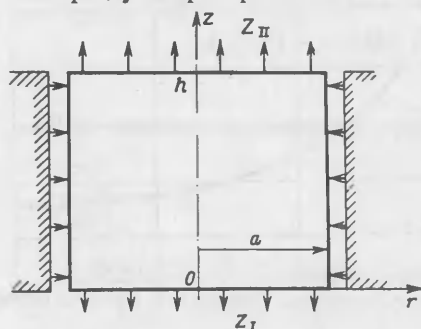


Рис. 2.7. Упругий цилиндр конечной высоты, радиально возбуждаемый жесткой обоймой.

упругий цилиндр колеблется без трения о поверхность возбуждающей его обоймы, т. е. касательные напряжения на боковой поверхности цилиндра отсутствуют, колебания цилиндра вдоль оси будем характеризовать волновым числом для продольных волн в безграничной среде  $k_l$ . При  $\nu = 0,5$ , когда цилиндрический преобразователь заполнен водой, расчет волнового числа  $k$  может быть проведен на основании работы [99].

Сделаем эти допущения, приступим к решению задачи. Для большей общности будем считать, что торцы цилиндра нагружены различными импедансами  $Z_I$  и  $Z_{II}$  (см. рис. 2.7). Разместив начало цилиндрической системы координат в центре нижнего торца, смещение вдоль оси цилиндра будем искать в следующем виде:

$$w = A \sin kz + B \cos kz. \quad (7.2)$$

Запишем граничные условия на торцах:

$$1) \text{ при } z = 0$$

$$\dot{w} = -\dot{w}_0; \quad \sigma_z = \sigma_0, \quad (7.3)$$

где

$$\sigma_z = 1/S_T \cdot \int_{(S_T)} [(\lambda + 2\mu) \cdot \partial w / \partial z + \lambda (\partial u / \partial r + u/r)] dS_T \quad (7.4)$$

— среднее по торцу осевое напряжение;  $S_T$  — площадь торца. Тогда импеданс излучения нижнего торца

$$Z_I = \sigma_0 / \dot{w}_0 = -\sigma_0 / i\omega w_0; \quad (7.5)$$

$$2) \text{ при } z = h$$

$$\dot{w} = \dot{w}_h; \quad \sigma_z = \sigma_h, \quad (7.6)$$

и при этом

$$Z_{II} = \sigma_h / i\omega w_h. \quad (7.7)$$

С учетом формул (7.2) — (7.7) найдем неизвестные коэффициенты  $A$  и  $B$ :

$$A = \frac{M}{i\omega Z_I} \frac{\left[ \frac{Z_I}{Z_{II}} + \cos kh + \frac{c_l}{c} \frac{\rho c_l}{iZ_{II}} \sin kh \right]}{\left\{ \frac{c_l}{c} \cos kh \left( \frac{\rho c_l}{iZ_I} + \frac{\rho c_l}{iZ_{II}} \right) - \sin kh \left[ 1 + \left( \frac{c_l}{c} \right)^2 \frac{\rho c_l}{Z_I} \frac{\rho c_l}{Z_{II}} \right] \right\}}, \quad (7.8)$$

$$B = \frac{M}{i\omega Z_I} \frac{\left[ \sin kh \left( \frac{c_l}{c} \frac{\rho c_l}{iZ_{II}} \operatorname{tg} kh/2 + 1 \right) \right]}{\left\{ \frac{c_l}{c} \cos kh \left( \frac{\rho c_l}{iZ_I} + \frac{\rho c_l}{iZ_{II}} \right) - \sin kh \left[ 1 + \left( \frac{c_l}{c} \right)^2 \frac{\rho c_l}{Z_I} \frac{\rho c_l}{Z_{II}} \right] \right\}}, \quad (7.9)$$

где

$$M = 1/S_T \cdot \int_{(S_T)} \lambda (\partial u / \partial r + u/r) dS_T. \quad (7.10)$$

Учитывая зависимость аксиальной составляющей смещения  $w$  от координаты  $z$  [см. формулу (7.2)], определим удельный входной импеданс боковой поверхности цилиндра при  $r = a$ :

$$Z_{вх} = \tilde{\sigma}_r / \dot{u}, \quad (7.11)$$

где

$$\tilde{\sigma}_r = 1/h \cdot \int_0^h \sigma_r dz$$

— среднее по высоте упругого цилиндра радиальное напряжение, отнесенное к единице площади его боковой поверхности. Здесь  $\sigma_r$  находится по формуле (5.5).

Преобразуем выражение (7.11), используя формулу (5.5):

$$Z_{\text{вх}} = Z' + Z''; \quad (7.12)$$

$$Z' = -[(\lambda + 2\mu) \cdot \partial u / \partial r + \lambda u / r] / i \omega u; \quad (7.13)$$

$$Z'' = -\lambda \frac{1}{h} \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz / i \omega u. \quad (7.14)$$

С учетом условия (5.3) смещение  $u$  определяется выражением (5.7), подставив которое в формулу (7.13), получим

$$Z' = Z_I. \quad (7.15)$$

Принимая во внимание формулы (5.7) и (5.10), находим

$$M = 2\lambda/a \cdot C J_1(k_1 a). \quad (7.16)$$

Подставив в формулу (7.14) значение (7.2) для  $w$  с учетом выражений (7.8), (7.9) и (7.16), после интегрирования получим

$$Z'' = -i(\rho c_l) [\nu/(1-\nu)]^2 \frac{2a/h}{(k_1 a)^2} \times \\ \times \frac{\left[ \frac{Z_I}{\rho c_l} + \frac{Z_{II}}{\rho c_l} - 2i \frac{c_l}{c} \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \right]}{\left\{ \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} kh \left( \frac{Z_I}{\rho c_l} + \frac{Z_{II}}{\rho c_l} \right) - i \left[ \left( \frac{c_l}{c} \right)^2 + \frac{Z_I}{\rho c_l} \frac{Z_{II}}{\rho c_l} \right] \right\}}. \quad (7.17)$$

Таким образом, импеданс  $Z_{\text{вх}}$  радиально возбуждаемого упругого цилиндра конечной высоты  $h$  определяется двумя слагаемыми, одно из которых равно импедансу цилиндра с абсолютно жесткими торцами, а второе —  $Z''$  — зависит от относительной высоты цилиндра  $h/a$  и сопротивления излучения торцов. При  $Z_I = Z_{II} = Z_T$  выражение (7.17) для  $Z''$  переходит в следующую формулу:

$$Z'' = R'' + iX'' = -i\rho c_l \frac{(a/h)[\nu/(1-\nu)]^2 \cdot (2/k_1 a)^2}{\left[ \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} kh/2 - iZ_T/\rho c_l \right]}. \quad (7.18)$$

Обозначив отношение  $\rho c_l$  к волновому сопротивлению воды через  $m = \rho c_l / (\rho c_{\text{в}})$  и учитывая, что площадь боковой поверхности цилиндра  $S_{\text{бок}}$  связана с площадью торца  $S_T$  соотношением

$$S_{\text{бок}}/S_T = 2h/a, \quad (7.19)$$

с учетом выражения (7.1) найдем удельную величину активной составляющей входного импеданса радиально возбуждаемого цилиндра на единицу площади его торца:

$$R = \frac{R''}{2(\rho c)_B S_T} = \frac{R_T}{(\rho c)_B} \left( \frac{2}{k_1 a} \right)^2 \left( \frac{\nu}{(1-\nu)} \right)^2 \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{R_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} \right]^2 + \left[ \frac{X_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} - \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (7.20)$$

Запишем также выражение для реактивной составляющей входного импеданса

$$X = \frac{X_{Bx}}{(\rho c)_B} = m \left[ \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{k_1 a} \right] - \\ - (ma/h) \left( \frac{2}{k_1 a} \right)^2 \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \right]^2 \left[ \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} - \frac{X_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} \right] \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{R_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} \right]^2 + \left[ \frac{X_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} - \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (7.21)$$

Определим теперь соотношение колебательных скоростей на торце и боковой поверхности цилиндра:

$$\dot{w}/\dot{u} = |\dot{w}/\dot{u}| e^{i\varphi}. \quad (7.22)$$

Подставляя в формулу (7.22) величину  $w$  из выражения (7.2) с коэффициентами  $A$  и  $B$ , вычисленными в соответствии с формулами (7.8) и (7.9), и значение (5.7) для  $u$ , в случае одинаковых нагрузок на торцах  $Z_I = Z_{II} = Z_T$  получаем

$$\left| \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \right| = \frac{\nu}{1-\nu} \frac{2}{k_1 a} \left\{ \left[ \frac{R_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} \right]^2 + \left[ \frac{X_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} - \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} \right]^2 \right\}^{-1/2}; \quad (7.23)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\frac{R_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m}}{\left[ \frac{X_T}{(\rho c)_B} \frac{1}{m} - \frac{c_l}{c} \operatorname{ctg} \frac{kh}{2} \right]} \right\} \left. \begin{array}{l} + \pi \\ + 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = h. \\ z = 0. \end{array} \quad (7.24)$$

Из сравнения формул (7.23) и (7.19) находим, что

$$\left| \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \right|^2 = \frac{R}{R_T/(\rho c)_B}. \quad (7.25)$$

Выражение (7.25) можно вывести также из энергетических соображений, подобно тому, как была получена формула (3.17) для слоистых систем. Действительно, равенство активных мощностей на боковой

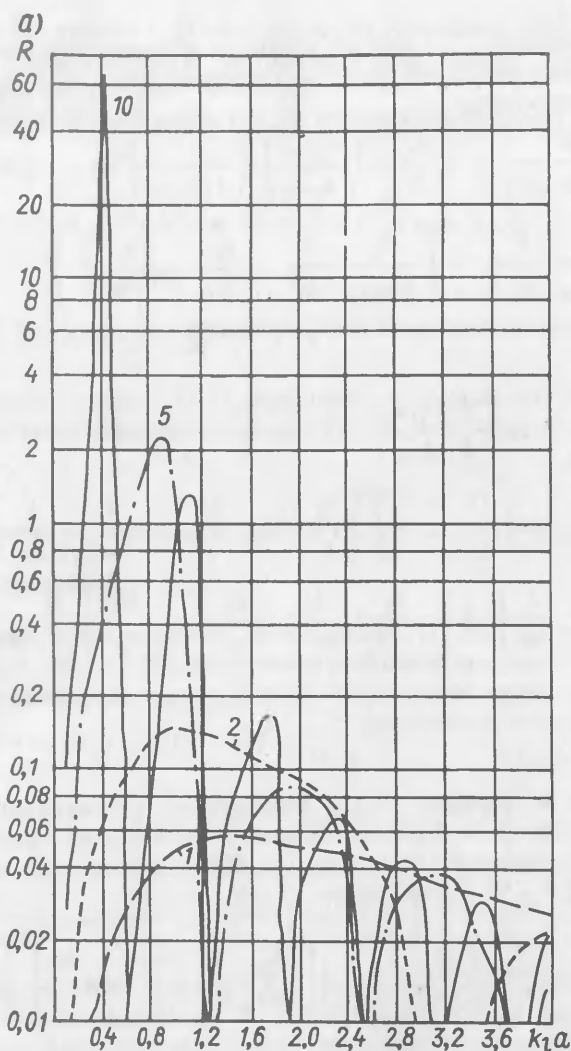


Рис. 2.8. Зависимости удельной (на единицу площади радиально возбуждаемого цилиндра от его волновой нагрузки торцов цилиндра на безграничную среду (а)

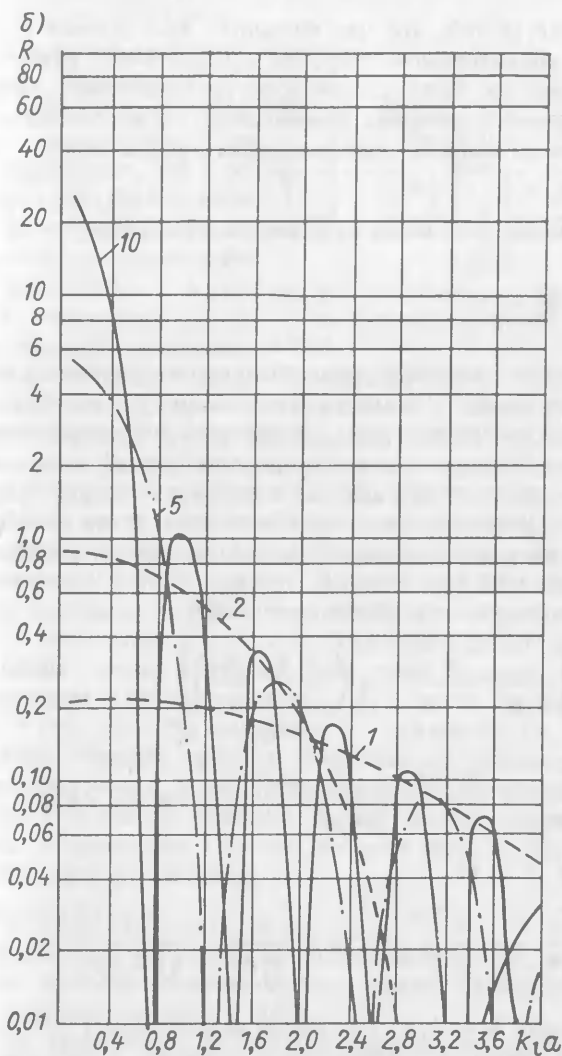
Числами на кривых указано отношение  $h/a$ .

поверхности цилиндра и торцах, т. е. на входе и выходе системы, дано следующее соотношение:

$$|\dot{u}|^2 R'' S_{\text{бок}} = |\dot{w}|^2 R_T 2S_T,$$

откуда с учетом формулы (7.19) приходим к выражению (7.25).

Полученные формулы показывают, что с уменьшением коэффициента Пуассона  $\nu$  значение активной составляющей входного импеданса радиально возбуждаемого цилиндра, а также вклад торцов в реак-



торца) активной составляющей входного импеданса радиуса, построенные для  $\nu = 0,4$  и  $m = 0,5$ , в случае или на трубы с абсолютно жесткими стенками (б).

тивную составляющую уменьшается за счет ослабления степени трансформации радиальных колебаний цилиндра в продольные. В случае отсутствия нагрузки на торцах, т. е. при  $Z_T = 0$ , для среды без потерь  $R = 0$ , что физически очевидно.

На рис. 2.8, а приведена типичная зависимость  $R$  от  $k_1 a$ , построенная для  $\nu = 0,4$ ,  $m = 0,5$  и  $k = k_1$ . График показывает, что с увеличением относительной высоты цилиндра  $h/a$  положение первого максимума  $R$  сдвигается в сторону меньших  $k_1 a$ , а его величина растет. Этот

рост объясняется тем, что для больших  $h/a$  степень трансформации радиальной колебательной скорости в продольную увеличивается, что следует также из чисто статических представлений. Например, если  $\nu = 0,5$  (материал цилиндра несжимаем), то, исходя из неизменности объема, отношение аксиального смещения к радиальному

$$w/u = h/a. \quad (7.26)$$

Этот же результат получается из формулы (7.23) при

$$\frac{ka}{2} h/a \ll 1.$$

Пусть теперь каждый из торцов сплошного упругого цилиндра излучает плоскую волну в полубесконечную трубу с абсолютно жесткими стенками, заполненную средой с волновым сопротивлением  $\rho c_1$ . Это соответствует случаю, когда цилиндрический преобразователь с внутренним экраном расположен в составе антенны, состоящей из бесконечного числа соосно установленных подобных друг другу преобразователей, на которые не подано напряжение, а зазор между преобразователями пренебрежимо мал. При этом  $R_T = \rho c_1$ ,  $X_T = 0$ , и выражения (7.20) и (7.21) преобразуются к следующему виду:

$$R = m \left[ \frac{2}{k_1 a} \frac{\nu}{1-\nu} \sin \left( \frac{k_1 a}{2} \frac{h}{a} \right) \right]^2; \quad (7.27)$$

$$X = \frac{Z_1}{(\rho c)_в} + \frac{m}{2} \frac{a}{h} \left[ \frac{2}{k_1 a} \frac{\nu}{1-\nu} \right]^2 \sin k_1 a \cdot h/a. \quad (7.28)$$

Если  $k_1 a \ll 1$ , то

$$R = m \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{h}{a} \right]^2; \quad X = + \frac{m}{k_1 a} \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)^2}. \quad (7.29)$$

Зависимость  $R$  от  $k_1 a$ , как видно из формулы (7.27) и рис. 2.8, б, представляет собой осциллирующую функцию с экстремумами при

$$(k_1 a/2)(h/a) = (2n+1)\pi/2,$$

когда

$$R_{\max} = m [(2/k_1 a)(\nu/(1-\nu))]^2, \quad (7.30)$$

и нулями при

$$(k_1 a/2)(h/a) = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В случае  $k_1 a \ll 1$  величина  $R$  находится из формулы (7.29), а соотношение колебательных скоростей равно

$$|\dot{w}/\dot{u}| = \sqrt{R} = [(\nu/1-\nu)(h/a)]\sqrt{m}. \quad (7.31)$$

При  $\nu = 0,5$  и  $m = 1$  (резиноподобная среда) формула (7.31) совпадает с выражением (7.26).

График, представленный на рис. 2.8, б, показывает, что с ростом волнового радиуса  $k_1 a$  величины  $R_{\max}$  резко уменьшаются — пропорционально уменьшению амплитудного члена  $(2/k_1 a)^2$  в формуле (7.27). Реактивная же составляющая входного импеданса

управляется в основном членом  $Z_1$ . Однако при  $\nu = 0,5$  и  $k_1 a \ll 1$ , как видно из формул (7.28) и (7.29), значение  $X$  равно нулю.

Если рассматривать группу преобразователей с внутренними экранами, работающих в фазе, то следует учитывать влияние зазора на импеданс излучения торцов внутренних экранов (рис. 2.9). Из соображений симметрии ясно, что в плоскости, перпендикулярной оси  $z$  и расположенной между указанными торцами, нормальная составляющая колебательной скорости можно принять равной нулю. Поэтому при отсутствии зазора импеданс нагрузки торцов  $Z'_T = \infty$ . При наличии зазора импеданс  $Z'_T$  определяется как входной импеданс симметрично возбуждаемого с обоих торцов и излучающего своей боковой поверхностью упругого цилиндра с параметрами  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$  (в частности, водного зазора:  $\nu_1 = 0,5; \mu_1 = 0$ ) радиусом  $a$  и высотой  $2h_1$ , равной расстоянию между торцами экранов. Возбуждение приложено к торцам цилиндрического зазора, и он трансформирует колебания вдоль оси в радиальные. При выводе исходим из следующих предпосылок: а) зазор  $2h_1$  мал по сравнению с длиной волны в воде; б) нагрузка на цилиндрической поверхности зазора

$$Z_6 = R_6 + iX_6 \quad (7.32)$$

равна сопротивлению излучения цилиндра радиусом  $a^*$  и высотой  $h_1$  в бесконечно жестком цилиндрическом экране. (Значения  $R_6$  и  $X_6$  приведены, например, в работе [116]).

При этих допущениях определим входной импеданс зазора при  $z = -h_1$  как

$$Z'_T = -\sigma_z/\dot{w} = \sigma_z/i\omega w. \quad (7.33)$$

(Естественно, что при  $z = 0$  аксиальное смещение  $w = 0$ ).

Найдем импеданс боковой поверхности цилиндрического зазора  $Z_6$  при  $r = a$

$$Z_6 = \frac{\frac{1}{h_1} \int_{-h_1}^0 \sigma_r dz}{i\omega u}. \quad (7.34)$$

\*Предполагаем при этом, что цилиндрический излучатель тонкостенный и его внутренний диаметр практически равен наружному.

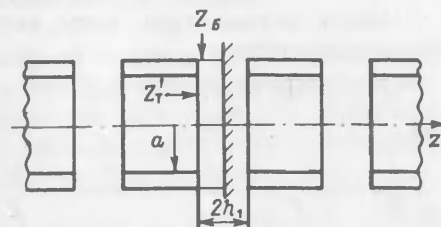


Рис. 2.9. Взаимное расположение цилиндрических преобразователей, работающих в фазе.

Исходя из симметрии задачи, выражение для смещения  $w$  примем в следующем виде:

$$w = A_1 \sin k_1 z, \quad (7.35)$$

где

$$A_1 = \frac{-M}{\left[ (\lambda_1 + 2\mu_1) k_1 \sin k_1 h_1 \left( i \frac{Z'_T}{\rho_1 c_1} - \operatorname{ctg} k_1 h_1 \right) \right]}; \quad (7.36)$$

$\rho_1$  — плотность среды в зазоре;  $k_1 = \omega/c_1$  — волновое число в зазоре, причем  $c_1 = [(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1]^{1/2}$ ; значение  $M$  определяется выражением (7.16) с заменой  $\lambda$  на  $\lambda_1$ .

Из условия (7.34) найдем

$$-Z'_\sigma = \frac{\left[ (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right]}{i\omega u} - \frac{\lambda_1 \int_{-h_1}^0 \frac{\partial w}{\partial z} dz}{i\omega u} = -(Z'_\sigma + Z''_\sigma). \quad (7.37)$$

Если принять  $u$  в форме (5.7), из выражения (7.37) следует, что

$$Z'_\sigma = Z_I,$$

причем  $Z_I$  определяется выражением (5.10) при  $k_I = k_1$ . Для  $Z''_\sigma$ , используя формулы (7.37), (7.35) и (7.36), найдем

$$Z''_\sigma = i2\rho_1 c_1 \frac{a/h_1}{(k_1 a)^2} \left[ \frac{\nu}{1-\nu} \right]^2 \frac{1}{\left( \frac{iZ'_T}{\rho_1 c_1} + \operatorname{ctg} k_1 h_1 \right)}. \quad (7.38)$$

Представляя значение  $Z_\sigma$  в форме (7.37) и принимая  $Z'_T = R'_T + iX'_T$ , из формулы (7.38) с учетом соотношений (5.10) и (7.32) для водного зазора окончательно получим

$$\frac{R'_T}{(\rho c)_B} = \frac{R_\sigma}{(\rho c)_B} \frac{a}{h_1} \frac{2}{(k_1 a)^2} \left\{ \left[ \frac{R_\sigma}{(\rho c)_B} \right]^2 + \left[ \frac{X_\sigma}{(\rho c)_B} - \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \right]^2 \right\}^{-1}; \quad (7.39)$$

$$\frac{X'_T}{(\rho c)_B} = +\operatorname{ctg} k_1 h_1 - \frac{a}{h_1} \frac{2}{(k_1 a)^2} \left[ \frac{X_\sigma}{(\rho c)_B} - \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \right] \times \left\{ \left[ \frac{R_\sigma}{(\rho c)_B} \right]^2 + \left[ \frac{X_\sigma}{(\rho c)_B} - \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (7.40)$$

Как видно из формулы (7.40), при  $h_1 \rightarrow 0$  реактивная составляющая входного импеданса зазора за счет слагаемого  $\operatorname{ctg} k_1 h_1$  обращается в бесконечность, что следует также из физической постановки задачи. При этом  $R'_T = 0$ . Следует отметить, что выражение (7.40) согласуется с формулой для входного импеданса слоя ограниченного радиуса, полученной в работе [27].



## § 8. Цилиндр с механическими потерями

Реальные материалы, из которых могут выполняться внутренние экраны цилиндрических преобразователей, обладают механическими потерями. Запишем выражение для входного импеданса радиально возбуждаемого цилиндра с потерями, нагруженного по торцам импедансами  $Z_T$ . На основании формул (5.10) и (7.18) получим

$$\bar{Z}_{вх} = \bar{Z}' + \bar{Z}'', \quad (8.1)$$

где

$$\bar{Z}' = i \rho \bar{c}_l \left[ \frac{J_0(\bar{k}_l a)}{J_1(\bar{k}_l a)} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{\bar{k}_l a} \right]; \quad (8.2)$$

$$Z'' = -i \rho c_l \frac{a/h \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right)^2 \left( \frac{2}{\bar{k}_l a} \right)^2}{\left[ \operatorname{ctg} \frac{\bar{k}_l h}{2} - i \frac{Z_T}{\rho \bar{c}_l} \right]}; \quad (8.3)$$

$\bar{c}_l$  и  $\bar{k}_l$  — комплексные скорость и волновое число. (Здесь и далее будем считать коэффициент Пуассона чисто вещественным).

Принимая

$$\bar{c}_l = c_l (1 - i \eta_c), \quad (8.4)$$

для  $\eta_c < 0,3$  находим

$$\bar{k}_l = \omega / \bar{c}_l \approx k_l (1 + i \eta_c). \quad (8.5)$$

Известно [73], что функция Бесселя от комплексного аргумента равна

$$J_n(\bar{k}_l a) = U_n(\bar{k}_l a) + i V_n(\bar{k}_l a).$$

Если в разложении функций Бесселя ограничиться лишь членами, содержащими  $\eta_c$  в первой степени, то можно приближенно положить

$$U_n(\bar{k}_l a) = J_n(k_l a);$$

$$V_n(\bar{k}_l a) = \eta_c \frac{d[J_n(k_l a)]}{d(k_l a)}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} J_0(\bar{k}_l a) &= J_0(k_l a) - i \eta_c (k_l a) J_1(k_l a); \\ J_1(\bar{k}_l a) &= J_1(k_l a) + i \eta_c (k_l a) \left[ J_0(k_l a) - \frac{J_1(k_l a)}{k_l a} \right] \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Подставляя в формулу (8.1) значения (8.6) функций Бесселя, находим

$$\frac{\operatorname{Re}(\bar{Z}')}{\rho c_l} = \eta_c (k_l a) \left\{ \frac{\frac{J_0(k_l a)}{J_1(k_l a)} + \frac{J_1(k_l a)}{J_0(k_l a)} - \eta_c^2 (k_l a)}{\frac{J_1(k_l a)}{J_0(k_l a)} + \eta_c^2 (k_l a) \left[ (k_l a) \frac{J_0(k_l a)}{J_1(k_l a)} - 2 \right]} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{2}{(k_l a)^2} \right\}; \quad (8.7)$$

$$\frac{\text{Im}(\bar{Z}')}{\rho c_l} = \frac{1 - \eta_c^2 (k_1 a) \left[ (k_1 a) - \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} \right]}{\frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} + \eta_c^2 (k_1 a) \left[ (k_1 a) \frac{J_0(k_1 a)}{J_1(k_1 a)} - 2 \right]} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{1}{k_1 a} \quad (8.8)$$

Из формулы (8.8) следует, что функция  $\text{Im}(\bar{Z}')/\rho c_l$  при  $\eta_c^2 \ll 1$  мало отличается от значений, полученных по формуле (5.10). Поэтому будем интересоваться лишь вещественной частью импеданса  $\bar{Z}'$ . Экстремальные значения  $\text{Re}(\bar{Z}')$  наблюдаются при значениях функций Бесселя, близких к нулю.

Если  $J_0(k_1 a) = 0$  (это происходит при  $k_1 a = 2,4; 5,33 \dots$ ),

$$\frac{\text{Re}(\bar{Z}')}{\rho c_l} = \eta_c k_1 a \left[ 1 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{2}{(k_1 a)^2} \right] \approx \eta_c k_1 a \quad (8.9)$$

Если  $J_1(k_1 a) = 0$  ( $k_1 a = 3,83; 7,01 \dots$ ),

$$\frac{\text{Re}(\bar{Z}')}{\rho c_l} = \frac{1}{\eta_c k_1 a} \left[ 1 - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} 2\eta_c \right] \approx \frac{1}{\eta_c k_1 a} \quad (8.10)$$

В первом случае функция (8.7) принимает минимальные значения, а во втором — максимальные. На рис. 2.10 приведены зависимости  $\text{Re}(\bar{Z}')/\rho c_l$  от  $k_1 a$ , рассчитанные по формуле (8.7) для ряда значений  $\eta_c$  при  $\nu = 0,4$ . Наблюдается довольно широкая область волновых размеров  $k_1 a$ , в которой относительная величина активной составляющей входного импеданса мала, хотя и зависит в соответствии с формулой (8.9) от  $\eta_c$ .

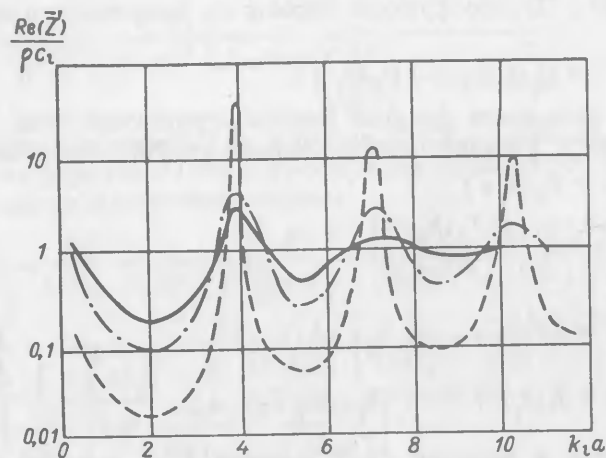


Рис. 2.10. Зависимость активной составляющей входного импеданса радиально возбуждаемого бесконечно длинного цилиндра с потерями от волнового радиуса для случая  $m = 0,5$ ;  $\nu = 0,4$ .

---  $\eta_c = 0,01$ ; - · -  $\eta_c = 0,05$ ; —  $\eta_c = 0,1$ .

Максимальные значения этой функции могут достигать больших величин, особенно при малых  $\eta_c$  [см. формулу (8.10)], однако область  $k_1 a$ , в которой это наблюдается, невелика. С ростом  $k_1 a$  осцилляции сглаживаются, а кривые приближаются к значению  $\text{Re}(\bar{Z}')/\rho c_l \approx 1$ .

Для вычисления суммарной величины активной составляющей  $\bar{Z}_{вх}$  по формуле (8.1) с учетом механических потерь в материале цилиндра, найдем  $\text{Re}(\bar{Z}'')/\rho c_l$ . Используя представление (8.5), после несложных преобразований из формулы (8.1) получаем

$$\frac{\text{Re}(\bar{Z}'')}{\rho c_l} = \frac{a}{h} \left[ \frac{\nu}{1 - \nu} \right]^2 \left( \frac{2}{k_1 a} \right)^2 \times \\ \times \left[ \frac{(\text{sh } 2y - 3\eta_c \sin 2x)}{[2(\text{ch}^2 y - \cos^2 x)]} + \frac{R_r}{\rho c_l} - 4\eta_c \frac{X_r}{\rho c_l} \right] \times \\ \times \left\{ \left( \frac{R_r}{\rho c_l} \right)^2 + \left( \frac{X_r}{\rho c_l} \right)^2 + \frac{(\sin^2 2x + \text{sh}^2 2y)}{[2(\text{ch}^2 y - \cos^2 x)]^2} + \right. \\ \left. + \frac{\left[ \frac{R_r}{\rho c_l} (\eta_c \sin 2x + \text{sh } 2y) - \frac{X_r}{\rho c_l} (\eta_c \text{sh } 2y - \sin 2x) \right]^2}{(\text{ch}^2 y - \cos^2 x)} \right\}^{-1}, \quad (8.11)$$

где  $x = (k_1 a)h/2a$ ;  $y = \eta_c x$ .

Влияние механических потерь на активную составляющую входного импеданса цилиндра определяется суммой

$$\frac{\text{Re}(\bar{Z}_{вх})}{\rho c_l} = \frac{\text{Re}(\bar{Z}')}{\rho c_l} + \frac{\text{Re}(\bar{Z}'')}{\rho c_l}$$

Анализ показывает, что потери, характеризуемые коэффициентом  $\eta_c$ , поднимают общий уровень величины  $\text{Re}(\bar{Z}_{вх})$ .

Проблема создания и расчета искусственных акустических сред рассматривалась многими авторами [21, 70, 75, 123 и др.]. Одним из типов такой среды является резиноподобный материал с полостями. Как известно [62, 117, 121], резины, обладая объемной упругостью  $\lambda$ , равной примерно объемной упругости воды, имеют модуль сдвига  $\mu$ , на два порядка меньший, чем  $\lambda$ . Такое соотношение между этими модулями позволяет путем преобразования объемных деформаций в сдвиговые значительно уменьшить эффективный модуль сжатия

среды, что приводит к уменьшению скорости звука. Преобразование одних деформаций в другие осуществляется путем создания в сплошном материале воздушных полостей или каналов. При этом относительно малые объемные деформации, возникающие при прохождении через среду продольной волны, вызывают большие сдвиговые деформации, которые концентрируются вблизи поверхности полостей. Изменяя размеры полостей или их число в единице объема, можно регулировать степень „размягчения” среды. Поскольку резины обладают существенными потерями при сдвиговых деформациях, среды с полостями используются в качестве эффективных поглотителей звука [86, 87, 89] и акустических экранов [68, 93, 96, 109, 178, 182].

В настоящей главе развита теория, позволяющая рассчитывать акустические и упругие параметры сред с полостями. Метод расчета зависит от соотношения длины распространяющейся в среде упругой волны  $\Lambda$  и размеров полостей. Если эти размеры малы по сравнению с  $\Lambda$  и полости относительно равномерно распределены по объему, то выражения для определения параметров таких микронеоднородных сред могут быть получены в статическом приближении. Идея метода заключается в отыскании выражения для статической упругости характерного элемента среды (сферической оболочки, цилиндрической трубки и т. п.) при граничных условиях, которые задаются, исходя из физической постановки задачи. Найденный эффективный модуль упругости  $E_{эф}$  используется для расчета „статической” скорости по формуле, аналогичной выражению (1.5):

$$c_{эф} = (E_{эф}/\rho_{ср})^{1/2},$$

где  $\rho_{ср}$  — усредненная плотность среды.

Статическое рассмотрение оказывается также полезным при расчете сжатия сред с полостями гидростатическим давлением и определения их акустических параметров в сжатом состоянии.

## 5 9. Упругая среда с цилиндрическими каналами

Искусственной средой с полостями, пригодной для построения акустических экранов, является резина с цилиндрическими каналами [93, 96, 178]. Каналы в плоскости, перпендикулярной их осям (рис. 3.1), расположены так, что создается плотная „упаковка” из правильных шестиугольников. Впервые приближенный расчет акустических свойств такой среды провел Г. Д. Малюжинец. Теория среды с цилиндрическими каналами была разработана В. В. Тютюкиным [123] и развита в работах [22, 28, 33, 110, 134–137].

Если в среде вдоль оси каналов распространяется упругая волна, то, вследствие симметрии расположения шестигранных призм, свойства среды можно определить, зная упругие и акустические параметры одной призмы, на каждой из граней которой радиальные смещения  $u$  и тангенциальные напряжения  $\tau_{r\theta}$  равны нулю. Чтобы упростить рассмотрение, призмы заменяют круговым цилиндром (см. рис. 3.1), при этом

площадь поперечного сечения такого цилиндра должна быть равна площади поперечного сечения первоначальной шестигранной призмы.

Граничными на внешней поверхности цилиндра (при  $r = b$ ) будут следующие условия:

$$u = 0; \tau_{rz} = 0. \quad (9.1)$$

На поверхности цилиндрической полости отсутствуют радиальное и тангенциальное напряжения. Поэтому при  $r = a$

$$\sigma_r = \tau_{rz} = 0. \quad (9.2)$$

Таким образом, проблема определения акустических свойств среды сводится к решению задачи о распространении продольных упругих волн вдоль

оси полого круглого цилиндра, помещенного в абсолютно жесткую цилиндрическую трубу и способного деформироваться без трения об ее поверхность. Точное решение динамической задачи получено В. В. Тютениным [123] методом, развитым для сплошного упругого цилиндра [72, 85, 127] при соответствующих рассматриваемому случаю граничных условиях (9.1) и (9.2). В результате найдено следующее трансцендентное уравнение относительно волнового числа  $k$  в трубке:

$$(k_1^2 - k^2)[4k^2 F(k_2 b) - 2k_1^2] + (k_1^2 - 2k^2)F(k_1 b) = 0, \quad (9.3)$$

где

$$F(k_n b) = (k_n a) \frac{[J_1(k_n b)N_0(k_n a) - N_1(k_n b)J_0(k_n a)]}{[J_1(k_n b)N_1(k_n a) - N_1(k_n b)J_1(k_n a)]}, \quad n = 1, 2.$$

Уравнение (9.3) может быть решено только численно. По аналогии с задачей о распространении продольных волн в сплошном упругом бесконечно длинном цилиндре [72, 92], разложение цилиндрических функций в ряд дает возможность получить приближенное аналитическое решение уравнения (9.3). Удерживая один член ряда, находят выражение для волнового числа (скорости) в статическом приближении; удерживая два члена ряда, получают значение скорости с учетом динамической поправки. Однако для этих двух случаев можно решить задачу более простым и физически ясным способом. Для получения значения скорости в статическом приближении используются уравнения теории упругости при малых статических деформациях рассматриваемой цилиндрической трубки с заданными на ее поверхности граничными условиями (9.1) и (9.2) [28]. Во втором случае по аналогии с работой [147] анализируются радиальные и осевые колебания конечной по высоте трубки, и после определения парциальных резонансных частот этих колебаний и коэффициента связи между ними находится динамическая поправка к скорости, аналогичная поправке Рэлея [33].

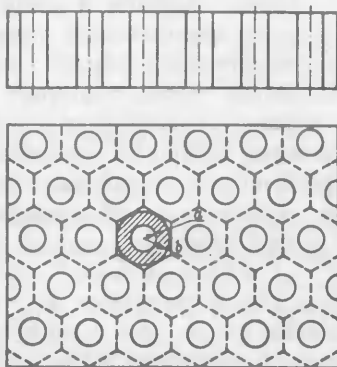


Рис. 3.1. Среда с цилиндрическими казалами.

Расчет скорости в статическом приближении. Известно [85], что характер динамических упругих деформаций, например, монолитного цилиндрического стержня, радиус которого мал по сравнению с длиной юнговской волны, совпадает со статическим случаем. Скорость распространения упругих волн в таком стержне можно определить, исходя из значений плотности материала стержня и модуля Юнга. Очевидно, что такой подход справедлив также для среды с цилиндрическими каналами, если внутренний и наружный радиусы трубки малы по сравнению с длиной волны.

„Скользят торцы“. Для определения статического модуля упругости трубки  $E_{тр}$  при малых деформациях решим задачу о ее сжатии вдоль оси  $z$ , предполагая, что сжимающие усилия к торцам трубки приложены через жесткую пластинку, скользящую по торцам (рис. 3.2). Деформация трубки будет осесимметричной и плоской, т. е.

$$\partial u / \partial z = \partial w / \partial r = 0.$$

При этом уравнения движения (5.1) переходят в следующие уравнения равновесия [66]:

$$\partial^2 u / \partial r^2 + \frac{1}{r} \partial u / \partial r - u / r^2 = 0; \quad (9.4)$$

$$\partial^2 w / \partial z^2 = 0. \quad (9.5)$$

Решением уравнения (9.5) является величина относительной деформации вдоль оси  $z$ :

$$\partial w / \partial z = \epsilon_z = \delta. \quad (9.6)$$

Уравнение (9.4) — это линейное однородное уравнение Эйлера второго порядка. Как известно, его частные решения имеют вид

$$u = r^n.$$

Подставляя это значение  $u$  в уравнение (9.4), получаем характеристическое уравнение

$$n^2 - 1 = 0,$$

корням которого  $n_1 = 1$  и  $n_2 = -1$  соответствуют частные решения  $r$  и  $r^{-1}$ . Тогда общее решение будет

$$u = C_1 r + C_2 / r,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования, для определения которых используем всего два граничных условия:

$$1. u = 0 \text{ при } r = b; \quad (9.7)$$

$$2. \sigma_r = 0 \text{ при } r = a. \quad (9.8)$$

Найдя из граничных условий произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$ , окончательно получим

$$u = -B \delta (r - b^2 / r), \quad (9.9)$$

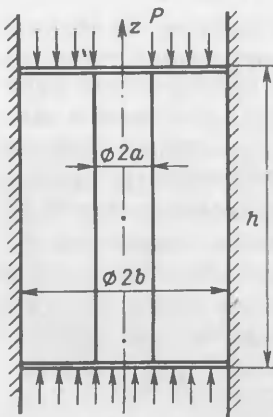


Рис. 3.2. Цилиндрическая трубка в абсолютно жесткой цилиндрической обойме.

где

$$B = \frac{\lambda \epsilon^2}{2 [(\lambda + \mu) \epsilon^2 + \mu]} ; \quad (9.10)$$

$\epsilon^2 = a^2/b^2$  – коэффициент перфорации.

Определим модуль упругости трубки при ее осевом сжатии

$$E_{\text{тр}} = P/\delta, \quad (9.11)$$

где  $P$  – давление, действующее на всю площадь жесткой пластинки (см. рис. 3.2). Напряжение в поперечном сечении трубки  $\sigma_z$  связано с  $P$  очевидным соотношением

$$\sigma_z = P/(1 - \epsilon^2). \quad (9.12)$$

Подставив в формулу для  $\sigma_z$  [см. подинтегральное выражение в формуле (7.4)] значение  $u$  (9.9), с учетом формул (9.11) и (9.12) получим [28]:

$$E_{\text{тр}} = \mu(1 - \epsilon^2) \frac{[\lambda(1 + 3\epsilon^2) + 2\mu(1 + \epsilon^2)]}{[(\lambda + \mu)\epsilon^2 + \mu]}. \quad (9.13)$$

Скорость в статическом приближении вычисляется по формуле (1.5), при этом плотность

$$\rho = \rho_{\text{ср}} = \rho_0(1 - \epsilon^2). \quad (9.14)$$

Определим скорость в резиновой трубке, т. е. при условии  $\mu \ll \lambda$ , а также для  $\mu \ll \lambda \epsilon^2$  (последнее выполняется для  $\epsilon^2 \geq 0,1$ ). Из формул (9.13), (9.14) и (1.5) находим

$$E_{\text{тр}} = \mu \frac{(1 - \epsilon^2)(1 + 3\epsilon^2)}{\epsilon^2}; \quad (9.15)$$

$$c_{\text{тр}} = c_t \left[ \frac{(1 + 3\epsilon^2)}{\epsilon^2} \right]^{1/2}, \quad (9.16)$$

где  $c_t = (\mu/\rho_0)^{1/2}$  – скорость сдвиговых волн в резине.

В табл. 6 приведены значения  $c_{\text{тр}}/c_t$ , рассчитанные по формуле (9.16). Эта формула имеет ясный физический смысл: с ростом  $\epsilon^2$  значение  $c_{\text{тр}}$  стремится к величине  $2c_t$ , т. е. к скорости продольных волн в тонкой резиновой пластинке.

Радиально закрепленные торцы. Радиальное закрепление торцов трубки, которое можно осуществить путем приклейки

Таблица 6. Зависимость отношения скорости в трубке  $c_{\text{тр}}$  к скорости сдвиговых волн в резине  $c_t$  от  $\epsilon^2$

| $\epsilon^2$                | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  |
|-----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{c_{\text{тр}}}{c_t}$ | 3,61 | 2,84 | 2,52 | 2,35 | 2,24 | 2,16 | 2,05 |

к ним жесткой пластинки, приводит к уменьшению осевой податливости трубки. Эффективный модуль трубки  $E_{эф}$  увеличивается при этом тем сильнее, чем меньше ее высота по сравнению с наружным (или внутренним) радиусом. Выражение для расчета  $E_{эф}$  может быть получено вариационным методом Ритца, как это обычно делают в случае монолитных стержней с закрепленными торцами [9, 11, 12, 98, 101]. Этот метод для расчета упругих свойств резиновой ( $\nu = 0,5$ ) трубки использован в работе [33]. Таким же способом можно рассчитать упругость трубки при любом коэффициенте Пуассона [39]. Решение задачи проводим в предположении, что при деформации поперечные сечения трубки остаются плоскими, т. е. осевые перемещения не зависят от радиуса, и являются только функцией  $z$ :

$$w = f(z). \quad (9.17)$$

Граничными для задачи являются условия (9.7) и (9.8), а также соотношения

$$u = 0 \text{ при } z = \pm h/2; \quad (9.18)$$

$$\partial u / \partial z = 0 \text{ при } z = 0. \quad (9.19)$$

Последние обусловлены тем, что на торцах радиальные смещения отсутствуют, а нагрузка действует симметрично на оба конца трубки. Тогда выражение для радиального смещения с учетом формулы (9.9) принимаем в следующем виде:

$$u = f'(z) (b^2/r - r)B, \quad (9.20)$$

где

$$f'(z) = \partial w / \partial z.$$

Решение задачи состоит в отыскании минимума функционала, зависящего от потенциальной энергии деформирования упругого тела  $\Pi_1$  и потенциала внешних сил  $\Pi_2$ . Выражение для  $d\Pi_1$  в случае осевой симметрии имеет вид [90]

$$d\Pi_1 = \mu [\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2 + \lambda/(2\mu) (\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z^2) + 0,5\gamma_{rz}^2]. \quad (9.21)$$

Отметим, что для резины

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z \approx 0, \quad (9.22)$$

поэтому

$$d\Pi_1 = \mu (\epsilon_r^2 + \epsilon_\theta^2 + \epsilon_z^2 + 0,5\gamma_{rz}^2). \quad (9.23)$$

С учетом формул (9.17) и (9.20) определяем компоненты относительных деформаций

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \partial u / \partial r = -f'(z) (1 + b^2/r^2)B; \\ \epsilon_\theta &= u/r = f'(z) (b^2/r^2 - 1)B; \\ \gamma_{rz} &= f''(z) (b^2/r - r)B. \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi_1 = 2\pi \int_a^b \int_{-h/2}^{h/2} d\Pi_1 r dr dz. \quad (9.25)$$

Подставляя формулы (9.24) в выражение (9.21), а затем в (9.25) и выполняя интегрирование по переменной  $r$ , находим

$$\Pi_1 = \pi \mu b^2 \int_{-h/2}^{h/2} [\varphi(\epsilon) f'^2(z) + \psi(\epsilon) f''^2(z)] dz, \quad (9.26)$$

где

$$\varphi(\epsilon) = E_{\text{тр}}/2\mu; \quad (9.27)$$

$$\psi(\epsilon) = \frac{B^2 b^2}{4} (1 - \epsilon^2) L; \quad (9.28)$$

$$L = \epsilon^2 - 3 - \frac{2 \ln \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)}. \quad (9.29)$$

Определяем потенциал внешнего давления  $P$

$$\Pi_2 = -P\pi b^2 \Delta h = -P\pi b^2 h \delta, \quad (9.30)$$

где

$$\Delta h = \int_{-h/2}^{h/2} f'(z) dz \quad (9.31)$$

— осевая деформация трубки,  $\delta = \Delta h/h$  — относительная деформация. С учетом формул (9.26) и (9.30) запишем выражение для полной энергии системы

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \int_{-h/2}^{h/2} H(f', f'', z) dz, \quad (9.32)$$

где

$$H(f', f'', z) = \pi b^2 \{ \mu [\varphi(\epsilon) f'^2(z) + \psi(\epsilon) f''^2(z)] + P f'(z) \}.$$

Для того, чтобы энергия, определяемая интегралом (9.32), была минимальной, функция  $f'(z)$  должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$\frac{\partial H}{\partial f'} - \frac{d}{dz} \frac{\partial H}{\partial f''} = 0. \quad (9.33)$$

Подставляя в формулу (9.33) значение  $H$ , получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$f'''(z) - \frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)} f'(z) = \frac{P}{2\mu\varphi(\epsilon)},$$

решением которого будет функция

$$f'(z) = -\frac{P}{2\mu\varphi(\epsilon)} + D_1 \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}} z \right] + D_2 \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}} z \right], \quad (9.34)$$



где  $D_1$  и  $D_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (9.18) и (9.19). В результате выражение (9.34) записываем в следующем виде:

$$f'(z) = -\frac{P}{2\mu\varphi(\epsilon)} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}} z \right]}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}} \frac{h}{2} \right]} \right\}. \quad (9.35)$$

Величина осевой деформации в соответствии с выражениями (9.31) и (9.35) равна

$$\Delta h = \frac{Ph}{2\mu\varphi(\epsilon)} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\psi(\epsilon)}{\varphi(\epsilon)}} \frac{2}{h} \operatorname{th} \left[ \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}} \frac{h}{2} \right] \right\}. \quad (9.36)$$

Определим по аналогии с формулой (9.11) модуль упругости трубки с закрепленными торцами как

$$E_{\text{эф}} = P \left/ \frac{\Delta h}{h} \right.$$

Тогда из формулы (9.36) получим выражение для расчета коэффициента жесткости, который характеризует увеличение модуля  $E_{\text{эф}}$  по сравнению с модулем трубки со скользящими торцами [39]:

$$\beta_{\text{ж}} = E_{\text{эф}}/E_{\text{тр}} = \left\{ 1 - \frac{1}{A(\epsilon^2)} \frac{b}{h} \operatorname{th} \left[ A(\epsilon^2) \frac{h}{b} \right] \right\}^{-1}, \quad (9.37)$$

где

$$A(\epsilon^2) = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\varphi(\epsilon)}{\psi(\epsilon)}}, \quad (9.38)$$

а функции  $\varphi(\epsilon)$  и  $\psi(\epsilon)$  находятся по формулам (9.27) и (9.28). Для резины

$$A(\epsilon^2) = \left[ \frac{1 + 3\epsilon^2}{\epsilon^2} \frac{2}{L} \right]^{1/2}. \quad (9.39)$$

При условии

$$\frac{h}{b} > \frac{2}{A(\epsilon^2)} \quad (9.40)$$

формулу (9.37) можно преобразовать к более простому виду

$$1/\beta_{\text{ж}} = E_{\text{тр}}/E_{\text{эф}} = 1 - b/h \frac{1}{A(\epsilon^2)}. \quad (9.41)$$

Оценку применимости выражения (9.41) проводим по табл. 7, в которой приведены значения  $2/A(\epsilon^2)$ , рассчитанные для резиновой трубки. В случае, если закреплен один из торцов трубки, а на другой действует

Таблица 7. Зависимость члена  $2/A(\epsilon^2)$  от  $\epsilon^2$

| $\epsilon^2$              | 0,1  | 0,2  | 0,3  | 0,4  | 0,5  | 0,6  | 0,7  |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{2}{A(\epsilon^2)}$ | 0,63 | 0,55 | 0,48 | 0,40 | 0,32 | 0,26 | 0,13 |

нагрузка через пластинку со „скользящим” контактом, коэффициент жесткости равен

$$\beta'_{ж} = \left\{ 1 - \frac{1}{A(\epsilon^2)} \frac{b}{2h} \operatorname{th} \left[ A(\epsilon^2) \frac{2h}{b} \right] \right\}^{-1} \quad (9.42)$$

Зависимости  $1/\beta_{ж}$  и  $1/\beta'_{ж}$  от относительной высоты  $h/b$  резиновой трубки (рис. 3.3), рассчитанные по формулам (9.37) и (9.42), показывают, что при  $h/b > 3$   $\beta_{ж} = \beta'_{ж} \approx 1$ . Это означает, что длина трубки достаточна для того, чтобы закрепление торцов не увеличивало ее жесткость. С уменьшением  $h/b$  жесткость трубки растет, причем  $\beta'_{ж} < \beta_{ж}$ . На основании полученных выражений для  $E_{эф}$  может быть

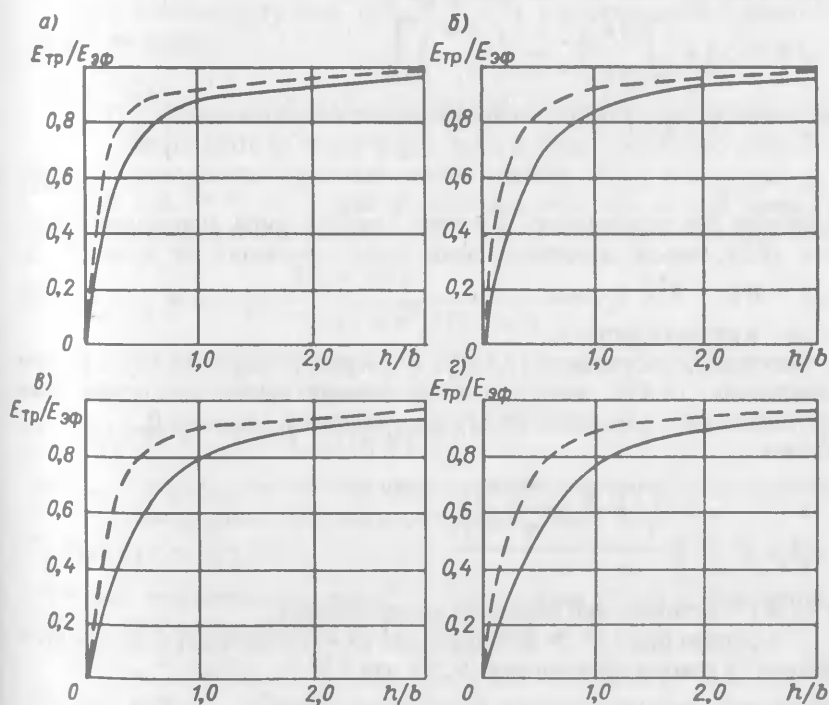


Рис. 3.3. Изменение жесткости резиновой трубки с радиально закрепленными торцами в зависимости от ее относительной высоты: а -  $\epsilon^2 = 0,6$ ; б -  $\epsilon^2 = 0,5$ ; в -  $\epsilon^2 = 0,4$ ; г -  $\epsilon^2 = 0,3$ .

— расчет по формуле (9.41) (закреплены оба торца); - - - - расчет по формуле (9.42) (закреплен один торец).

рассчитано значение эффективной скорости в трубке с радиально закрепленными торцами в статическом приближении.

**Резонансные свойства трубок.** Для решения ряда задач, связанных с расчетом параметров и применением искусственных сред с цилиндрическими каналами, необходимо знание резонансных частот трубки, являющейся моделью среды. К таким задачам относятся: вычисление скорости в трубке с учетом динамической поправки [33, 123], расчет поглощений на основе перфорированных резин [86, 89] и т. д. Данные о резонансах трубки позволяют также определить критерий применимости метода статического приближения при расчете скорости в трубке [135, 136].

Исследование резонансных свойств трубок при различных условиях на торцах проводим методом Рэлея [10, 120] путем определения максимальных значений потенциальной  $\Pi_{\max}$  и кинетической  $T_{\max}$  энергий и отыскания резонансной частоты из равенства

$$\Pi_{\max} = T_{\max} \quad (9.43)$$

Удельная кинетическая энергия единицы объема упругого тела определяется следующим соотношением [85]:

$$dT = 0,5 \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (9.44)$$

а удельную потенциальную энергию находят из выражения (9.21).

Бесконечно длинная трубка. В этом случае

$$w = \gamma_{rz} = 0. \quad (9.45)$$

Выражение для радиального смещения задаем в виде, аналогичном формуле (9.9), вводя дополнительный член, зависящий от времени  $t$ :

$$u = B \left( r - \frac{b^2}{r} \right) \cos \omega t, \quad (9.46)$$

где  $\omega$  — круговая частота.

Подставляя выражение (9.46) в формулы (9.21) и (9.44) с учетом соотношения (9.45), интегрируя по объему трубки и приравнявая в соответствии с формулой (9.43) получившиеся значения  $\Pi_{\max}$  и  $T_{\max}$  находим

$$(k_1 a)^2 = 8 \frac{\left( 1 + \epsilon^2 + \frac{\lambda}{\mu} \epsilon^2 \right)}{L}, \quad (9.47)$$

где  $(k_1 a)$  — резонансный волновой радиус трубки.

Для резины при  $\lambda \epsilon^2 \gg \mu$  выражение (9.47) переходит в следующую формулу [с учетом обозначения (9.29) для  $L$ ]:

$$(k_1 a)^2 = \frac{8 \epsilon^2}{\left[ \epsilon^2 - 3 - \frac{2 \ln \epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)} \right]}. \quad (9.48)$$

Таким образом, резонансные колебания бесконечно длинной резиновой трубки с радиально закрепленной внешней поверхностью опреде-

ляются волновым числом  $k_l$ , в то время как для трубки со свободной поверхностью резонанс зависит от волнового числа в тонкой пластинке  $k_L$  [85, 92], причем для резины  $(k_L a) \gg (k_l a)$ .

Трубка ограниченной высоты со „скользящими” торцами. В этом случае относительная деформация  $\partial w / \partial z$  постоянна по высоте трубки [см. формулу (9.6)] и

$$w = \int \delta dz = \delta z. \quad (9.49)$$

Выражение для радиального смещения примем в виде, аналогичном формуле (9.9)

$$u = B \delta (b^2/r - r) \cos \omega t. \quad (9.50)$$

Подставив значения (9.49) и (9.50) в формулы (9.21) и (9.44), после интегрирования по объему трубки получим

$$\Pi_{\max} = \pi \delta^2 b^2 (h/2) E_{\text{тр}}; \quad (9.51)$$

$$T_{\max} = \pi \rho \omega^2 \delta^2 (1 - \epsilon^2) \frac{b^2 h^3}{4} \left[ \frac{1}{6} + B^2 \left( \frac{b}{h} \right)^2 L \right]. \quad (9.52)$$

Для резиновой трубки (при  $B = 0,5$ ) в соответствии с равенством (9.43) находим

$$\left( \frac{\omega_p^2 \rho}{\mu} a \right)^2 = (k_l a)^2 = 12(b/h)^2 \frac{(1 + 3\epsilon^2)}{1 + 3/2(b/h)^2 L}, \quad (9.53)$$

где  $\omega_p$  — резонансная круговая частота трубки.

При  $b/h \rightarrow \infty$ , т. е. для бесконечно тонкого кольца, выражение (9.53) переходит в следующее:

$$(k_l a)_0^2 = \frac{8(1 + 3\epsilon^2)}{\epsilon^2 - 3 - (2 \ln \epsilon^2)/(1 - \epsilon^2)}. \quad (9.54)$$

С учетом определения (9.16) для  $c_{\text{тр}}$  формулу (9.53) можно преобразовать следующим образом:

$$(k_{\text{тр}} h)^2 = 12/[1 + 3/2(b/h)^2 L], \quad (9.55)$$

где  $k_{\text{тр}} = \omega_p / c_{\text{тр}}$  — волновое число в резиновой трубке на ее резонансе. В случае сравнительно длинной трубки, такой, что

$$(h/b)^2 \gg 3/2 L \quad (9.56)$$

(отметим, что, например, для  $\epsilon^2 = 0,6$  условие (9.56) соблюдается при  $h/b > 2,0$ ), из выражения (9.55) получаем

$$h / \Lambda_{\text{тр}} = 0,55, \quad (9.57)$$

где  $\Lambda_{\text{тр}} = 2\pi / k_{\text{тр}}$  — длина продольной волны в трубке. Это означает, что при относительной высоте, удовлетворяющей условию (9.56), резонанс трубки со „скользящими” торцами наступает, когда ее высота приблизительно равна половине длины волны в перфорированном слое.

Резиновая трубка с радиально закрепленными торцами. Выражение для радиального смещения с учетом

граничных условий (9.7), (9.8), (9.18) и (9.19) принимаем в следующем виде:

$$u = (r - b^2/r) (1 - 4z^2/h^2) \cos \omega t. \quad (9.58)$$

Для вычисления  $T_{\max}$  определим  $\epsilon_z = \partial w / \partial z$  из условия несжимаемости резины (9.22) как

$$\partial w / \partial z = -(\epsilon_r + \epsilon_\theta).$$

Тогда с учетом выражения (9.58)

$$w = -1,5 \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{z^2}{h^2} \right) z \cos \omega t,$$

и из формул (9.23), (9.44) и (9.43) находим

$$(k_r a)^2 = 10 \frac{\left[ 1 + 3\epsilon^2 + \frac{5}{4} \epsilon^2 (b/h)^2 L \right]}{\left[ 1 + \frac{5}{4} (b/h)^2 L \right]}. \quad (9.59)$$

При  $h/b \rightarrow 0$  значение  $k_r h \approx \pi$ . Это означает, что для весьма низкой трубки с закрепленными торцами ее резонанс наступает в случае, когда высота трубки равна половине длины сдвиговой волны в резине. Переписав выражение (9.59) аналогично тому, как это сделано для трубки со „скользящими” торцами, получим

$$(k_{\text{тр}} h)^2 = 10 \frac{\left[ 1 + \frac{5}{4} (b/h)^2 \frac{\epsilon^2}{(1 + 3\epsilon^2)} L \right]}{\left[ 1 + \frac{5}{4} (b/h)^2 L \right]}. \quad (9.60)$$

Для достаточно длинной трубки при  $(h/b)^2 \gg 5/4 L$

$$k_{\text{тр}} h = \pi; \quad h/\Lambda_{\text{тр}} \approx 0,5. \quad (9.61)$$

Сравнивая формулы (9.57) и (9.61), замечаем, что трубка с закрепленными торцами большей относительной высоты  $h/b$  резонирует практически при тех же  $h/\Lambda_{\text{тр}}$ , что и трубка с незакрепленными торцами. Это объясняется равенством модулей упругости  $E_{\text{эф}}$  и  $E_{\text{тр}}$  при  $h/b > 3$  (см. рис. 3.3).

Зависимости резонансных значений  $(k_r a)$  от  $h/b$  для трубок со свободными и закрепленными торцами приведены на рис. 3.4. Параметром кривых служит величина  $\epsilon^2$ . Кривые показывают, что при малых  $h/b$  резонанс трубки с закрепленными торцами лежит выше, чем у трубки со „скользящими” торцами. Поэтому при создании низкочастотных поглотителей, использующих резонансные свойства полостей, применяют [86, 87] перфорированные слои с герметизирующими накладками из резины. В этом случае акустические параметры слоя аналогичны параметрам резиновой трубки с незакрепленными („скользящими”) торцами.

Расчет скорости с учетом динамической поправки. Найденные значения резонансных частот используем при расчете скорости в трубке с учетом динамической поправки. Вывод проведем, основываясь на методе, разработанном в работе Гибе и Блехшмидта [147] применительно к стержням и трубкам, поскольку установлено (см. работу [72]), что их подход ближе к действительности, чем поправка Рэлея [106], и он дает интересную физическую модель распространения продольных волн в трубке. Согласно этой теории, колеблющуюся трубку рассматривают как две отдельные механические системы, каждая из которых обладает своим спектром резонансных частот. Первый спектр  $f_1$  берется таким же, как для стержня длиной  $h$  бесконечно малого поперечного сечения при продольных колебаниях

$$f_1 = n f_z = n(E/\rho)^{1/2} [1/2h]$$

Второй спектр — таким, как в диске бесконечно малой толщины со средним радиусом  $r$  при радиальных колебаниях

$$f_2 = f_r = (E/\rho)^{1/2} [1/2\pi r].$$

Уравнение частот такой трубки [92] записывается как

$$[(n f_z)^2 - F_{\text{тр}}^2](f_r^2 - F_{\text{тр}}^2) = q^2 F_{\text{тр}}^4, \quad (9.62)$$

где  $F_{\text{тр}}$  — частота собственных колебаний трубки;  $q$  — коэффициент связи между продольными и радиальными колебаниями. Для трубки со свободной поверхностью (т. е. для цилиндрической оболочки) величина  $q$  равна коэффициенту Пуассона  $\nu$  материала, из которого выполнена трубка.

Скорость распространения упругих волн в трубке определим на резонансе из соотношения

$$n \frac{\Lambda_F}{2} = n \frac{c}{2 F_{\text{тр}}} = h,$$

откуда

$$c = (2h F_{\text{тр}}) / n, \quad (9.63)$$

где  $\Lambda_F$  — длина волны в трубке на частоте  $F_{\text{тр}}$ ,  $n = 1, 2, 3 \dots$ . Значение  $F_{\text{тр}}$  можно найти из уравнения (9.62), если известен коэффициент связи  $q$ . Для его определения рассмотрим два предельных случая.

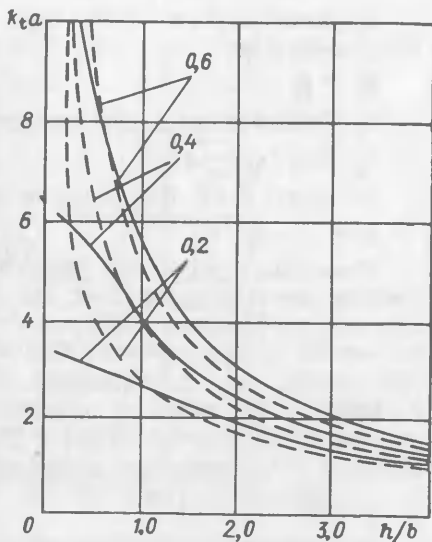


Рис. 3.4. Зависимость резонансного волнового радиуса трубки от ее относительной высоты  $h/b$  для различных коэффициентов перфорации  $\epsilon^2$ .

— — — — — трубка со свободными от напряжения торцами; - - - - - трубка с радиально закрепленными торцами.

а) Длина трубки  $h = 0$ , при этом  $f_z = \infty$ . Тогда из уравнения (9.62) получаем

$$F_I = f_r. \quad (9.64)$$

б) Длина трубки  $h = \infty$ , при этом  $f_z = 0$ . Тогда

$$F_{II} = f_r / \sqrt{1 - q^2}. \quad (9.65)$$

Формулы (9.64) и (9.65) позволяют вычислить коэффициент

$$q = (1 - F_I^2 / F_{II}^2)^{1/2}. \quad (9.66)$$

Применим описанный способ для расчета скорости в среде с цилиндрическими каналами. Для этого, как видно из предыдущего изложения, необходимы следующие величины:  $F_I$  — собственная частота бесконечно тонкого по высоте кольца с радиально закрепленным внешним краем;  $F_{II}$  — собственная частота бесконечно длинной трубки с радиально закрепленной внешней поверхностью. Используя полученные выше соотношения (9.64) и (9.65), с учетом выражения (9.16) по формуле (9.66) определим коэффициент связи

$$q = (1 - c_{\text{ТР}}^2 / c_l^2)^{1/2}. \quad (9.67)$$

Для резины скорость продольных волн  $c_l$  велика по сравнению со скоростью в трубке  $c_{\text{ТР}}$ . Поэтому в соответствии с формулой (9.67)  $q = 1$ . Тогда из уравнения (9.62) получим

$$F_{\text{ТР}} = f_r [1 + (f_r / n f_z)^2]^{-1/2}. \quad (9.68)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае  $f_z = c_{\text{ТР}} / 2h$ , формулу (9.68) представим в следующем виде:

$$F_{\text{ТР}} / f_r = k_t a / (k_t a)_0 = Q = \{1 + [(k_t a)_0 / s \cdot c_t / c_{\text{ТР}}]^2\}^{-1/2}, \quad (9.69)$$

где  $(k_t a)_0$  — резонансный волновой размер тонкого кольца, определяемый по формуле (9.52);  $s = (n\pi a) / h$  — параметр;  $k_t a$  — текущий волновой размер кольца, характеризующий изменение частоты  $F_{\text{ТР}}$ .

На основании формулы (9.63) при частоте  $F_{\text{ТР}}$ , определенной из выражения (9.69), получим следующую зависимость от частоты скорости упругих волн в трубке, отнесенной к ее „статическому” значению:

$$\frac{c}{c_{\text{ТР}}} = \frac{2F_{\text{ТР}}h}{n} = \frac{2f_r Q}{n} = \frac{(k_t a)_0}{s} \frac{c_t}{c_{\text{ТР}}} Q. \quad (9.70)$$

Обозначив величину  $[(k_t a)_0] / s \cdot (c_t / c_{\text{ТР}})$  через  $Y$ , перепишем выражение (9.70):

$$c / c_{\text{ТР}} = YQ, \quad (9.71)$$

где

$$Q = (1 + Y^2)^{-1/2} = k_t a / (k_t a)_0.$$

Таким образом, величина  $c / c_{\text{ТР}}$ , характеризующая относительную скорость в резине с цилиндрическими каналами с учетом динамической поправки, не зависит от коэффициента перфорации  $\epsilon^2$ , а является функцией только параметра  $Y$ . Из формулы (9.71) следует:

а) при  $Y^2 \gg 1$   $c / c_{\text{ТР}} = 1$ ;  $Q \rightarrow 0$ ;

б) при  $Y = 0$   $Q = 1$  и  $c / c_{\text{ТР}} = 0$ .

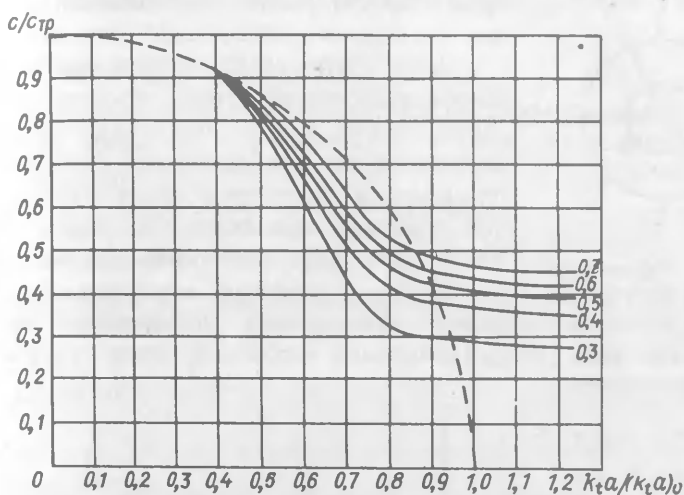


Рис. 3.5. Зависимость отношения динамической скорости в резиновой трубке к „статической” скорости от волнового радиуса.

————— — точное решение; - - - - - расчет по формуле (9.71).  
 Числами на кривых указано значение  $\epsilon = a/b$ .

На рис. 3.5 приведены для случая резины зависимости отношения скорости в трубке  $c$  к величине скорости в статическом приближении  $c_{ст}$  от параметра  $k_t a / (k_t a)_0$ , т. е. от частоты, которая входит в  $k_t$  при фиксированных значениях  $(k_t a)_0$ , определяемых формулой (9.54). Сплошными линиями нанесены точные значения скорости, полученные на основании решения уравнения (9.3)\*. При  $k_t a / (k_t a)_0 < 0,5$  наблюдается хорошее совпадение результатов. В области больших частот приближенная теория дает ошибку, так как с уменьшением скорости длина сдвиговой волны в резине становится сравнимой с толщиной стенки трубки, а в этом случае уже нельзя пользоваться статическими представлениями. Расчет по точной теории показывает, что скорость в трубке переходит в скорость поверхностных волн, аналогичных волнам Рэлея.

## § 10. Упругая среда со сферическими полостями

Наиболее простым экранирующим материалом является пористая резина [16, 143, 182], представляющая среду с произвольно расположенными и изолированными друг от друга сферическими полостями диаметром не более 2–3 мм. Материал получают при вулканизации смеси сырой резины с порофором, при разложении которого под действием высокой температуры образуются полости. Упругость такой

\* Расчеты проведены А. Е. Вовк.



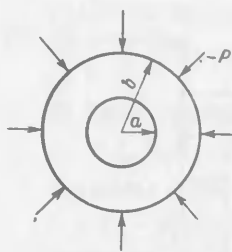


Рис. 3.6. Сферическая оболочка.

среды зависит как от концентрации полостей, так и от модуля сдвига резины-основы.

Метод статического приближения для среды со сферическими полостями, к которым можно также отнести жесткие пенопласты [145, 171], характерен тем, что статические свойства среды описываются поведением сферической пустотелой оболочки при сжатии давлением  $P$  [16, 181] (рис. 3.6). Отношение объема полости к объему сферической оболочки принимают

равным усредненной концентрации полостей в пористой среде [181]. Граничными условиями задачи будут следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0 \text{ при } r = a; \\ \sigma_r &= -P \text{ при } r = b. \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

Запишем известные [7] выражения для радиальных напряжения  $\sigma_r$  и смещения  $u$  в сферических координатах:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \cdot \partial u / \partial r + 2\lambda \cdot u / r; \quad (10.2)$$

$$u = Ar + B/r^2, \quad (10.3)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

Объемный модуль упругости сферической оболочки определим при  $r = b$  как

$$E_{\text{сф}} = \sigma_r / (\Delta V / V) = -P / (3u_b / b), \quad (10.4)$$

где  $\Delta V$  — изменение объема  $V$  оболочки при сжатии;  $u_b$  — радиальное смещение при  $r = b$ .

Находя с учетом граничных условий (10.1) неизвестные  $A$  и  $B$ , из формул (10.2) — (10.4) получим

$$E_{\text{сф}} = (1 - \epsilon^3) \frac{\lambda + 2/3 \mu}{1 + \frac{3}{4} \frac{\lambda}{\mu} \epsilon^3 + 0,5 \epsilon^3}, \quad (10.5)$$

где

$$\epsilon^3 = a^3 / b^3 \quad (10.6)$$

— коэффициент концентрации полостей в среде.

Переходя к техническим постоянным среды-основы  $E$  и  $\nu$ , приведем выражение (10.5) к следующему виду:

$$E_{\text{сф}} = 2/3 E \frac{1 - \epsilon^3}{\epsilon^3 (1 + \nu) + 2(1 - 2\nu)} = \tilde{K}, \quad (10.7)$$

где  $\tilde{K}$  — усредненный модуль упругости пористой среды. Практически интерес представляет усредненный продольный модуль упругости  $\tilde{D}$ .

связанный с объемным модулем  $\tilde{K}$  известным из теории упругости изотропных сред [79] соотношением

$$\tilde{D} = \tilde{K}[3(1 - \tilde{\nu})/(1 + \tilde{\nu})], \quad (10.8)$$

где  $\tilde{\nu}$  — усредненный коэффициент Пуассона рассматриваемой квазиизотропной среды со сферическими полостями. Из формул (10.7) и (10.8) получаем

$$\tilde{D} = 2 \frac{E(1 - \epsilon^3)}{\epsilon^3(1 + \nu) + 2(1 - 2\nu)} \frac{1 - \tilde{\nu}}{1 + \tilde{\nu}}. \quad (10.9)$$

Для  $\nu = 0,5$  и  $E = 3\mu$  из формул (10.7) и (10.9) находим выражения для объемного  $E_{сф}$  и продольного  $\tilde{D}$  модулей пористой резины:

$$E_{сф} = 4/3 \mu \frac{1 - \epsilon^3}{\epsilon^3}; \quad (10.10)$$

$$\tilde{D} = 4\mu \frac{1 - \epsilon^3}{\epsilon^3} \frac{1 - \tilde{\nu}}{1 + \tilde{\nu}}. \quad (10.11)$$

Величина усредненного коэффициента Пуассона может изменяться в пределах  $0 < \tilde{\nu} < 0,5$ , причем, чем больше концентрация полостей  $\epsilon^3$  в пористой резине, тем меньше должно быть значение  $\tilde{\nu}$ . Зададим зависимость  $\tilde{\nu}$  от  $\epsilon^3$  в виде следующей эмпирической формулы:

$$\tilde{\nu} = \nu(1 - \epsilon^3) = 0,5(1 - \epsilon^3). \quad (10.12)$$

Тогда, исходя из выражений (10.11) и (10.12), найдем „статическую” скорость распространения продольных волн в пористой резине

$$\tilde{c} = \left[ \frac{\tilde{D}}{\rho_0(1 - \epsilon^3)} \right]^{1/2} = 2c_t \left[ \frac{1 + \epsilon^3}{\epsilon^3(3 - \epsilon^3)} \right]^{1/2}. \quad (10.13)$$

Расчеты по формулам (9.16) и (10.13) показывают, что скорости в пористой резине и в резине с цилиндрическими каналами отличаются незначительно: при  $\epsilon^2 = \epsilon^3 = 0,1-0,2$  различие не превышает (5-10) %, а при  $\epsilon^3 > 0,3$  — (1-2) %. Таким образом, в средах с полостями определяющим фактором, от которого зависит скорость в среде, является, наряду со значением  $c_t$ , концентрация полостей, а не их форма. Последняя должна влиять только на пьезостабильность среды.

## § 11. Большие деформации резин с полостями

Резины с полостями, обладая большой податливостью, сжимаются под действием гидростатического давления. Для определения их акустических параметров в деформированном состоянии необходимо знание диаграммы сжатия характерного элемента среды (цилиндрической трубки, сферической оболочки и т. п.). Расчет диаграммы сжатия может быть проведен на основе теории больших деформаций резиновых деталей, развитой в работах [9, 11, 12, 59, 77, 78, 90, 98, 121, 150].

**Резина с цилиндрическими каналами.** В одной из первых работ, в которой был предложен метод расчета резин с цилиндрическими каналами при статическом сжатии [117], деформации определялись в линейном приближении и для незакрепленных торцов. С уточнениями, введенными в работе [28], связь давления  $P$  с относительной деформацией  $\delta$  получается в следующем виде:

$$P/\mu = (1 - \epsilon_0^2) \left[ \frac{3\delta}{1 - \delta} - \frac{1}{1 - \epsilon_0^2} \ln \frac{\epsilon_0^2 - \delta}{\epsilon_0^2(1 - \delta)} \right], \quad (11.1)$$

где  $\epsilon_0^2$  — начальный коэффициент перфорации при  $P = 0$ . Однако этот метод, как отмечено в работе [110], справедлив лишь до сравнительно небольших деформаций. При описании резиновой трубки с закрепленными торцами, подвергнутой сжатию, ранее предполагалось [33], что радиальные смещения внутренней стенки трубки аналогичны смещению поверхности монолитного стержня. Поскольку это предположение не является строгим, необходимо рассмотреть задачу в более точной постановке. Обычно такого рода задачи решаются вариационным методом Ритца. Суть метода заключается в том, что априорно, исходя из вида граничных условий, задается выражение для радиального смещения, подставляя которое в формулу для потенциальной энергии деформации упругого тела и определяя полную энергию с учетом потенциала внешних сил, ищут минимум этой энергии. Получившееся уравнение позволяет найти связь относительной деформации сжатия трубки вдоль оси и приложенного к торцам сжимающего давления. В случае больших деформаций энергия деформации резиновой трубки высотой  $h$  рассчитывается по формуле [9, 90]

$$\Pi_1 = 2\pi\mu \int_a^b \int_{-h/2}^{h/2} I_1 r dr dz, \quad (11.2)$$

где

$$I_1 = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz} \quad (11.3)$$

— первый инвариант тензора деформаций;

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + 0,5 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2; \quad \epsilon_{\theta\theta} = u/r + 0,5(u/r)^2; \\ \epsilon_{zz} &= 0,5[(1 + \partial w/\partial z)^2 + (\partial u/\partial z)^2 - 1] \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

— составляющие деформаций.

Выражение (11.2) справедливо для не более чем двукратного сжатия резинового стержня [9], т.е. до значений  $\delta < 0,5$ , что для трубок с коэффициентом перфорации  $\epsilon^2 < 0,6-0,7$  всегда соблюдается.

Подставляя выражения (11.4) в формулу (11.3), а затем в (11.2), получаем

$$\Pi_1 = \pi\mu \int_a^b \int_{-h/2}^{h/2} [2(\partial u/\partial r + u/r) + (\partial u/\partial r)^2 + (u/r)^2 + (\partial u/\partial z)^2 + (1 + \partial w/\partial z)^2 - 1] r dr dz. \quad (11.5)$$

Значение  $\partial w/\partial z$  находим из условия несжимаемости монолитной резины

$$\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 = 1. \quad (11.6)$$

Связь между приложенным давлением  $P$  и относительной деформацией  $\delta$  определяется из соотношения

$$[\partial(\Pi_1 + \Pi_2)]/\partial\delta = 0, \quad (11.7)$$

где  $\Pi_2$  — потенциал внешних сил, определяемый по формуле (9.30).

Таким образом, задача о больших деформациях резиновой трубки может быть решена, если суметь правильно задать выражение для радиального смещения.

„Скользящие” торцы. При сжатии трубки с радиально незакрепленными („скользящими”) торцами форма трубки не меняется (рис. 3.7), относительная деформация  $\delta$  вдоль оси  $z$  одинакова по высоте во всех сечениях трубки, а радиальное смещение не зависит от  $z$ . Поэтому можно принять

$$\delta = -\partial w/\partial z = \text{const}; \quad (11.8)$$

$$\partial u/\partial z = 0. \quad (11.9)$$

Это приводит к возможности рассчитывать модуль упругости трубки, находящейся в сжатом состоянии, исходя из соотношений линейной теории упругости. Для сравнительно небольших деформаций при коэффициенте перфорации  $\epsilon^2 < 0,2$  в работе [117] был проведен расчет, который не учитывал нелинейный характер деформаций.

Решение задачи в случае произвольной величины  $\epsilon^2$  начнем с предположения, что деформации трубки линейны. Тогда под действием давления  $P$  возникнет относительная деформация  $\delta$ , которая связана с модулем трубки, определяемым на основании формулы (9.15), следующим соотношением:

$$P = \delta E_{\text{тр}}^P = \delta\mu \times \frac{(1 - \epsilon_p^2)(1 + 3\epsilon_p^2)}{\epsilon_p^2}, \quad (11.10)$$

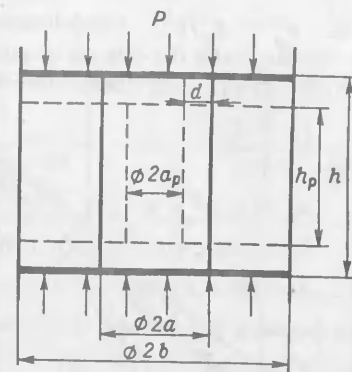


Рис. 3.7. Сжатие резиновой трубки с незакрепленными торцами.

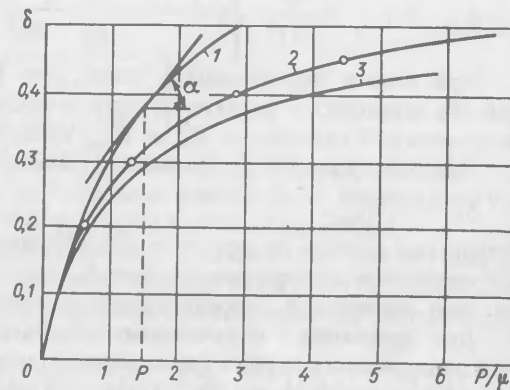


Рис. 3.8. Диаграммы сжатия резиновой трубки с незакрепленными торцами.

1 — расчет по формуле (11.15); 2 — расчет по формуле (11.28); 3 — расчет по формуле (11.18); ○ — расчет по формуле (4) работы [110].

где  $\epsilon_p^2 = a_p^2/b^2$  — коэффициент перфорации трубки при давлении  $P$  в случае, если бы она сжималась по линейному закону. Значение  $\epsilon_p^2$  находим из условия неизменности объема монолитной резины при сжатии:

$$V_0 = V_p, \quad (11.11)$$

где

$$V_0 = \pi(b^2 - a^2)h; \quad V_p = \pi(b_p^2 - a_p^2)h_p. \quad (11.12)$$

Учитывая, что относительная деформация

$$\delta = (h - h_p)/h, \quad (11.13)$$

из формул (11.11) и (11.12) получаем

$$\epsilon_p^2 = (\epsilon_0^2 - \delta)/(1 - \delta). \quad (11.14)$$

Подставив значение (11.14) в формулу (11.10), найдем

$$P = \mu \delta [(1 - \epsilon_0^2)(1 + 3\epsilon_0^2 - 4\delta)] / [(\epsilon_0^2 - \delta)(1 - \delta)]. \quad (11.15)$$

По формуле (11.15) рассчитываем зависимость  $\delta = f(P/\mu)$ , например, для  $\epsilon_0^2 = 0,6$  (рис. 3.8).

Величина  $E_{\text{тр}}^P$  является секущим модулем диаграммы сжатия, т. е. таким, как будто деформация трубки совершается по линейному закону. Модуль трубки со скользящими торцами в случае больших деформаций определяется углом наклона к оси абсцисс касательной в точке  $P$  к диаграмме сжатия, построенной на основании формулы (11.15) (см. рис. 3.8). Его нужно вычислять как производную [77]

$$E_{\text{кас}} = dP/d\delta = \text{ctg } \alpha. \quad (11.16)$$

Подставляя сюда значение  $P$  (11.15) и дифференцируя его по  $\delta$ , находим

$$E_{\text{кас}} = \mu \frac{1 - \epsilon_0^2}{(1 - \delta)^2} \left\{ 4 + \left[ \frac{(1 - \epsilon_0^2)(\epsilon_0^2 - \delta^2)}{(\epsilon_0^2 - \delta)^2} \right] \right\}. \quad (11.17)$$

При малых деформациях, таких, что  $\delta \ll 1$ ,  $\delta \ll \epsilon_0^2$ , выражение (11.17) переходит в формулу (9.15), в последней  $\epsilon^2$  меняется на  $\epsilon_0^2$ . Зависимость от  $\delta$  отношения  $E_{\text{тр}}^0$  к  $E_{\text{кас}}$  приведена на рис. 3.9.

Диаграмму сжатия теперь можно вычислить как

$$\delta_1 = P/E_{\text{кас}}. \quad (11.18)$$

Результаты расчета по формуле (11.18) показывают (см. рис. 3.8), что относительные деформации трубки  $\delta_1$  при сжатии получаются меньшими, чем значения  $\delta$ , определенные на основании выражения (11.15).

Для сравнения с полученными результатами решим задачу о больших деформациях трубки вариационным методом. Исходя из граничных условий задачи (в частности, из того, что при  $r = b$  и  $u = 0$ ), ищем выражение для радиального смещения в следующем виде:

$$u = B' d/a (r - b^2/r), \quad (11.19)$$

где  $B'$  — неизвестная пока постоянная,  $d$  — радиальное смещение внутренней стенки трубки. Величину  $d$  определяем, исходя из условия

неизменности объема резины (11.11), причем в формуле (11.10) следует принять  $a' = a - d$  (см. рис. 3.7). Тогда

$$V_p = \pi b^2 h_p \times \left( 1 - \epsilon_0^2 + \frac{2ad}{b^2} - \frac{d^2}{b^2} \right). \quad (11.20)$$

Из условия (11.11) с учетом формулы (11.20) находим выражение для определения  $d$ :

$$d = a \times \left[ 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_0^2 - \delta}{\epsilon_0^2(1 - \delta)}} \right]. \quad (11.21)$$

(Знак „-“ перед корнем выбирается для того, чтобы при  $\delta = 0$  выполнялось условие  $d = 0$ ). Постоянную  $B'$  находим из очевидного условия: при  $r = a$  должно соблюдаться равенство  $u = -d$ . С учетом сказанного из формулы (11.21) получаем

$$B' = \epsilon_0^2 / (1 - \epsilon_0^2). \quad (11.22)$$

Подставляя значения (11.21) и (11.22) в формулу (11.19), находим

$$u = G(r - b^2/r), \quad (11.23)$$

где

$$G = \frac{\epsilon_0^2}{1 - \epsilon_0^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_0^2 - \delta}{\epsilon_0^2(1 - \delta)}} \right]. \quad (11.24)$$

Сравнение выражения (11.23) с аналогичным выражением для  $u$ , полученным в статье [110] на основании работы В. Л. Бидермана [9], при  $r = a$  показывает, что обе формулы в точности совпадают.

Вычислим теперь диаграмму сжатия, учитывая, что для трубки со скользящими торцами выполняются условия (11.8) и (11.9). Подставив выражение для  $u$  (11.23) в формулу (11.5) с учетом соотношений (11.8) и (11.9), найдем

$$P_1 = 2\pi\mu h (b^2/2) (1 - \epsilon_0^2) [2G - \delta(1 - \delta/2) + G^2(1 + \epsilon_0^2)/\epsilon_0^2]. \quad (11.25)$$

Подставив выражения (11.25) и (9.30) в формулу (11.7), получим

$$\frac{P}{\mu(1 - \epsilon_0^2)} = 2 \frac{\partial G}{\partial \delta} \left[ 1 + G \frac{(1 + \epsilon_0^2)}{\epsilon_0^2} \right] - (1 - \delta), \quad (11.26)$$

где  $G$  определяется выражением (11.24), причем

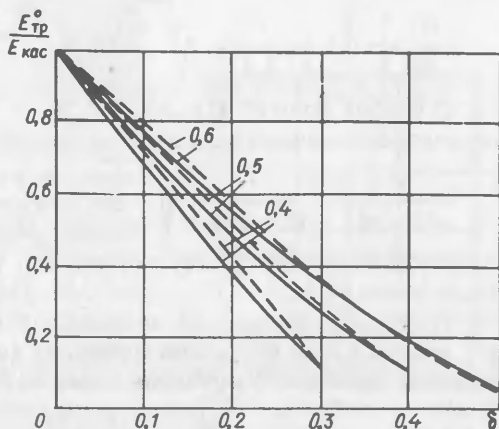


Рис. 3.9. Зависимости отношения начального модуля трубки со скользящими торцами к модулю трубки в сжатом состоянии от ее относительной деформации, построенные для различных начальных коэффициентов перфорации  $\epsilon_0^2$ .

— — — — — расчет на основании формулы (11.29); - - - - - расчет по формуле (11.17).

$$\frac{\partial G}{\partial \delta} = 0,5 \frac{1}{(1-\delta)^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0^2(1-\delta)}{\epsilon_0^2 - \delta}} \quad (11.27)$$

С учетом формул (11.24), (11.26) и (11.27) запишем выражение, позволяющее вычислять диаграмму сжатия:

$$\frac{P}{\mu(1-\epsilon_0^2)} = \frac{1}{(1-\delta)^2} \sqrt{\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_P^2}} \left[ 1 + \frac{1+\epsilon_0^2}{1-\epsilon_0^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_P^2}{\epsilon_0^2}} \right) \right] \quad (11.28)$$

Проверка формулы (11.28) показывает, что при  $\delta = 0$  значение  $P/\mu$  также равно нулю.

Результаты вычислений по формуле (11.28), а также по формуле (4) работы [110] полностью совпадают (см. рис. 3.8). График показывает, что значения  $P/\mu$ , рассчитанные по формуле (11.28), равны сумме аналогичных величин, определенных по формулам (11.15) и (11.18).

Одной из целей расчета диаграммы сжатия является определение модуля упругости  $E_{эф}^P$  трубки в сжатом состоянии. Он вновь находится по формуле (11.16). Дифференцируя выражение (11.28) по  $\delta$ , после преобразований получаем

$$E_{эф}^P = \mu(1-\epsilon_0^2) \left[ 1 + \frac{1}{2\epsilon_P^2} \left\{ (1+3\epsilon_0^2-4\delta) \sqrt{\frac{\epsilon_0^2}{\epsilon_P^2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ 1 + \frac{1+\epsilon_0^2}{1-\epsilon_0^2} \left( 1 - \sqrt{\frac{\epsilon_P^2}{\epsilon_0^2}} \right) \right] + \frac{1+\epsilon_0^2}{(1-\delta)^4} \right\} \right] \quad (11.29)$$

В случае  $\delta \ll 1$  и  $\delta \ll \epsilon_0^2$  формула (11.29) переходит в выражение (9.15) для модуля упругости  $E_{тр}^0$ . Отличие значений  $E_{тр}^0/E_{эф}^P$ , рассчитанных по формуле (11.29), от аналогичных данных, полученных из формулы (11.17), не превышает 5–7% (см. рис. 3.9). Это указывает на возможность проводить расчет модуля упругости трубки в сжатом давлении  $P$  состоянии на основании более простого соотношения (11.17).

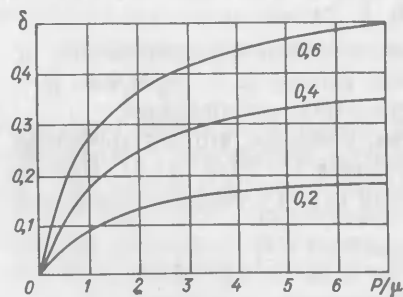


Рис. 3.10. Диаграммы сжатия трубки со „скользящими“ торцами, рассчитанные по формуле (11.28) для различных начальных коэффициентов перфорации  $\epsilon_0^2$ .

Таким образом, графики рис. 3.9 и рис. 3.10 позволяют оценить зависимость от давления акустических и упругих параметров резиновой трубки с незакрепленными („скользящими“) торцами.

Радиально закрепленные торцы. При решении задачи о деформированном состоянии трубки с радиально закрепленными торцами следует воспользоваться граничными условиями (9.7), (9.18) и (9.19), а также дополнительное условием

$$u = -d \text{ при } r = a, z = 0. \quad (11.30)$$

Значение  $d$  (рис. 3.11) найдем, исходя из неизменности объема

резины. Предположим, что при осевой деформации сечение внутренней стенки трубки в плоскости „ $r - z$ ” представляет собой параболу

$$r = dz^2 + g, \quad (11.31)$$

причем при  $z = \pm h_p/2$  радиус  $r = a$  (см. рис. 3.11). Подставив эти значения в формулу (11.31) и учитывая, что  $g = a - d$ , получим следующее уравнение параболы:

$$r = a \left[ 1 - d/a \left( 1 - 4z^2/h_p^2 \right) \right]. \quad (11.32)$$

Тогда объем трубки после сжатия

$$V_p = \pi b^2 h_p - V, \quad (11.33)$$

где

$$V = \pi \int_{-h_p/2}^{h_p/2} r^2 dz \quad (11.34)$$

— объем тела вращения, ограниченного параболой (11.32), вокруг оси  $z$ . Вычисляя  $V$  и подставляя его значение в формулу (11.33), находим

$$V_p = \pi b^2 h_p \left\{ 1 - \epsilon^2 \left[ 1 - \frac{4}{3} \frac{d}{a} + \frac{8}{15} \left( \frac{d}{a} \right)^2 \right] \right\}. \quad (11.35)$$

(Для краткости записи принимаем здесь и далее  $\epsilon_0^2 = \epsilon^2$ ). Из условия

$$V_0 = \pi b^2 (1 - \epsilon^2) h = V_p \quad (11.36)$$

с учетом соотношений (11.33) и (11.35) получим

$$\frac{d}{a} = \frac{5}{4} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{6}{5} \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^2}} \right]. \quad (11.37)$$

При смыкании стенок полости в точке  $r = 0, z = 0$  величина  $d/a = 1$ . Тогда  $V = \pi a^2 (h_p/5)$ , и из условия (11.36) можно определить предельную величину относительной деформации  $\delta_{пр}$ , после достижения которой расчет становится некорректным:

$$\delta_{пр} = 4\epsilon^2 / (5 - \epsilon^2). \quad (11.38)$$

Зададим теперь выражение для радиального смещения  $u$  в виде, удовлетворяющем граничным условиям (9.18) и (9.19)

$$u = Fd/a (r - b^2/r) (1 - 4z^2/h^2). \quad (11.39)$$

Учитывая дополнительное условие (11.30), из формулы (11.39) при  $r = a$  получим

$$u_a = -Fd(1 - \epsilon^2)/\epsilon^2. \quad (11.40)$$

Поскольку  $u_a = -d$ , то

$$F = \epsilon^2 / (1 - \epsilon^2),$$

и окончательно  $u$  запишется в следующем виде:

$$u = A (r - b^2/r) (1 - 4z^2/h^2), \quad (11.41)$$

где

$$A = \frac{5}{4} \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{6}{5} \frac{\delta}{1 - \delta} \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^2}} \right). \quad (11.42)$$

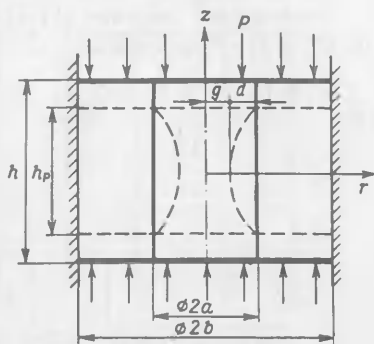


Рис. 3.11. Сжатие резиновой трубки с радиально закрепленными торцами.

Подставляя значение (11.41) в формулу (11.5), с учетом выражений (9.30) и (11.7) находим

$$P/\mu (1 - \epsilon^2) = X + Y, \quad (11.43)$$

где

$$X = \frac{4}{3} \frac{\partial A}{\partial \delta} (1 + NA); \quad (11.44)$$

$$\frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{3/4}{(1 - \delta)^2 \left[ 1 - \frac{4}{5} \frac{(1 - \epsilon^2)}{\epsilon^2} A \right]}; \quad (11.45)$$

$$N = 2 \left[ \frac{2}{5} \frac{1 + \epsilon^2}{\epsilon^2} + \left( \frac{b}{h} \right)^2 \left( \epsilon^2 - 3 - \frac{2 \ln \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right) \right]; \quad (11.46)$$

$$Y = \frac{1}{b^2 h (1 - \epsilon^2)} \frac{\partial}{\partial \delta} \left[ \int_a^b \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) r dr dz \right]. \quad (11.47)$$

Последний член может быть определен только численно. В качестве первого приближения предположим, что деформация сжатия вдоль оси  $z$  одинакова во всех сечениях и выполняется условие (11.8). Подставляя значение (11.8) в формулу (11.43) с учетом (11.47) и производя интегрирование в последней, получаем следующее выражение для расчета диаграммы сжатия:

$$P/\mu (1 - \epsilon^2) = X - (1 - \delta). \quad (11.48)$$

Проверка при  $\delta = 0$  дает:  $A = 0$ ;  $\partial A/\partial \delta = 3/4$  и  $P/\mu (1 - \epsilon^2) = 0$ , что соответствует физическому смыслу.

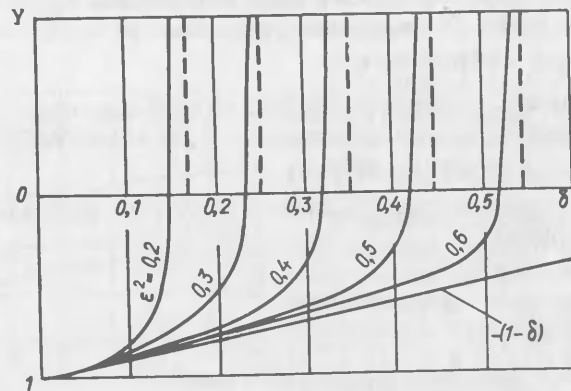


Рис. 3.12. Изменение члена  $Y$  в формуле (11.47) с ростом относительной деформации  $\delta$ .

--- величина  $\delta_{пр}$ , рассчитанная по формуле (11.38).

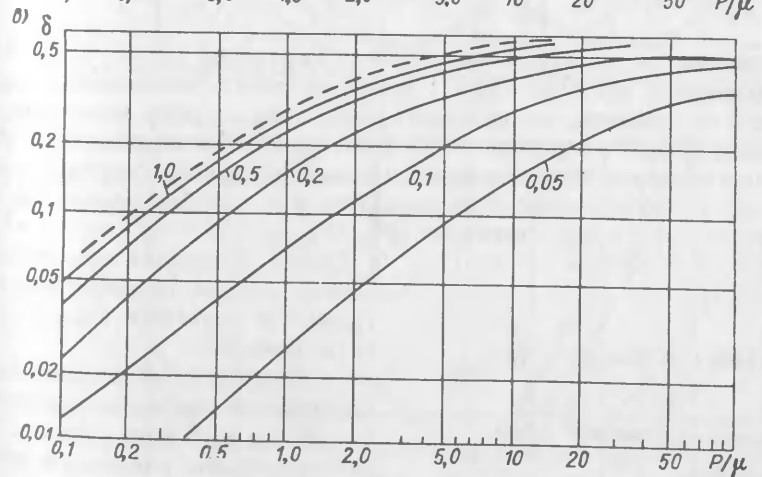
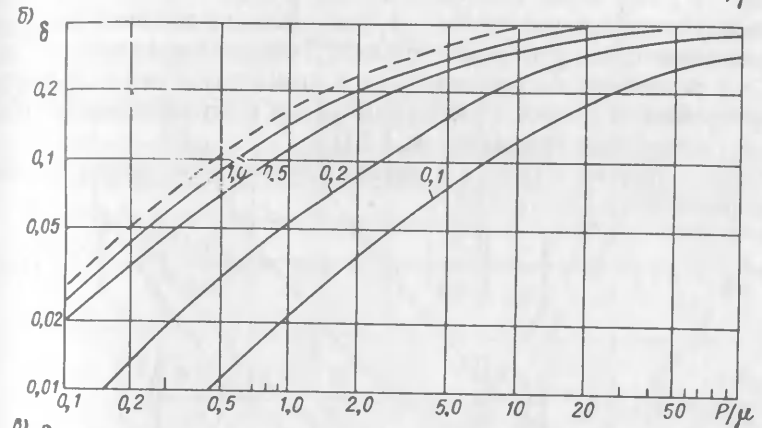
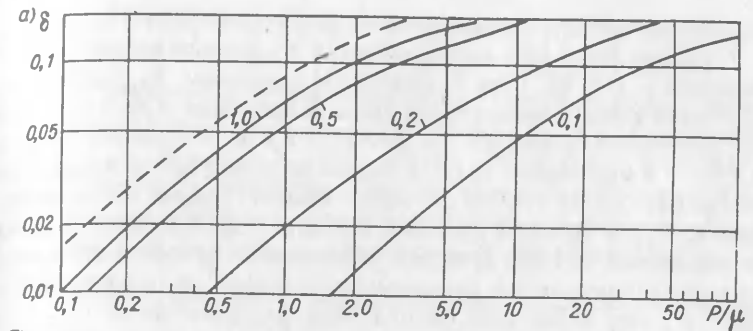


Рис. 3.13. Диаграммы сжатия трубки с радиально закрепленными торцами, построенные для различных  $h/b$ :  $a - \epsilon^2 = 0,2$ ;  $b - \epsilon^2 = 0,4$ ;  $c - \epsilon^2 = 0,6$ .

Для оценки ошибки, которую мы допускаем при замене выражения (11.47) на  $(\delta - 1)$ , был проведен расчет члена  $Y$  на ЭВМ БЭСМ-6 (рис. 3.12). Кривая  $Y$  асимптотически приближается к ординате,



соответствующей  $\delta_{\text{пр}}$ , определенной по формуле (11.38). При  $\delta < \delta_{\text{пр}}$  член  $Y$ , рассчитанный при фиксированных  $\epsilon^2$ , хорошо аппроксимируется значением  $-(1-\delta)$ . При  $\delta$ , близких к величинам  $\delta_{\text{пр}}$ , наблюдается существенная разница между ними, однако при таких  $\delta$  член  $X$  (11.44) также становится большим, и вклад  $Y$  в суммарное значение  $P/\mu(1-\epsilon^2)$  в выражении (11.43) оказывается несущественным. Поэтому диаграмму сжатия трубки с закрепленными торцами до значений  $\delta$ , близких к  $\delta_{\text{пр}}$ , с хорошей степенью точности можно вычислять на основании выражения (11.48) (рис. 3.13). Изменение относительной деформации трубки определяется начальным коэффициентом перфорации: чем больше  $\epsilon^2$ , тем податливее трубка. При фиксированном  $\epsilon^2$  трубка с меньшей относительной высотой  $h/b$  устойчивее к действию давления, по сравнению с более длинной трубкой. График показывает, что для  $h/b > 1$  радиальное закрепление торцов практически уже не влияет на деформируемость трубки, и она сжимается как в случае незакрепленных торцов (пунктирные кривые на рис. 3.13).

Модуль упругости трубки в сжатом состоянии определим на основании формул (11.16) и (11.48):

$$E_{\text{эф}}^P = \mu(1-\epsilon^2) \left\{ \frac{4}{3} \left[ \frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} (1 + AN) + N \left( \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^2 \right] + 1 \right\}, \quad (11.49)$$

где

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \delta^2} = 2(1-\delta)^2 \frac{\partial A}{\partial \delta} \left[ (1-\delta) + \frac{8}{15} \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} \left( \frac{\partial A}{\partial \delta} \right)^2 \right],$$

а величины  $A$  и  $\partial A/\partial \delta$  находятся из выражений (11.42) и (11.45). По формулам (11.49) и (11.48) можно рассчитать зависимость модуля трубки от давления, что позволяет проследить характер изменения отношения  $E_{\text{эф}}^P/P$  с ростом  $P/\mu$  (рис. 3.14). При определенных  $P/\mu$  кривые проходят через минимум, величина которого различна для различных  $\epsilon^2$ , но практически не зависит от  $h/b$  при фиксированном  $\epsilon^2$ . Так, для  $\epsilon^2 = 0,6$  значение  $(E_{\text{эф}}^P/P)_{\text{min}} = 5 \div 7$ ; для  $\epsilon^2 = 0,4 - 9 \div 10$ ; для  $\epsilon^2 = 0,2 - 20$ . Однако, положение этих минимумов с ростом относительной высоты  $h/b$  сдвигается влево по оси  $P/\mu$  (табл. 8).

Таблица 8. Значения  $\frac{P}{\mu} \min$ , при которых отношение  $\frac{E_{\text{эф}}^P}{\mu}$  минимально

| $\epsilon^2$ | $h/b$ |     |     |     |
|--------------|-------|-----|-----|-----|
|              | 0,1   | 0,2 | 0,5 | 1,0 |
| 0,2          | 30    | 10  | 3   | 1,7 |
| 0,4          | 25    | 8   | 2,5 | 1,7 |
| 0,6          | 12    | 5   | 1,9 | 1,7 |

Для получения максимальной эффективности звукоотражающего экрана на основе резины с цилиндрическими каналами в заданном диапазоне давлений необходимо выбирать наименьшее отношение  $E_{\text{эф}}^P/P$ . Кривые, приведенные на рис. 3.14, показывают, что это обеспечивается трубкой с большим начальным коэффициентом перфорации. Оптимальный выбор

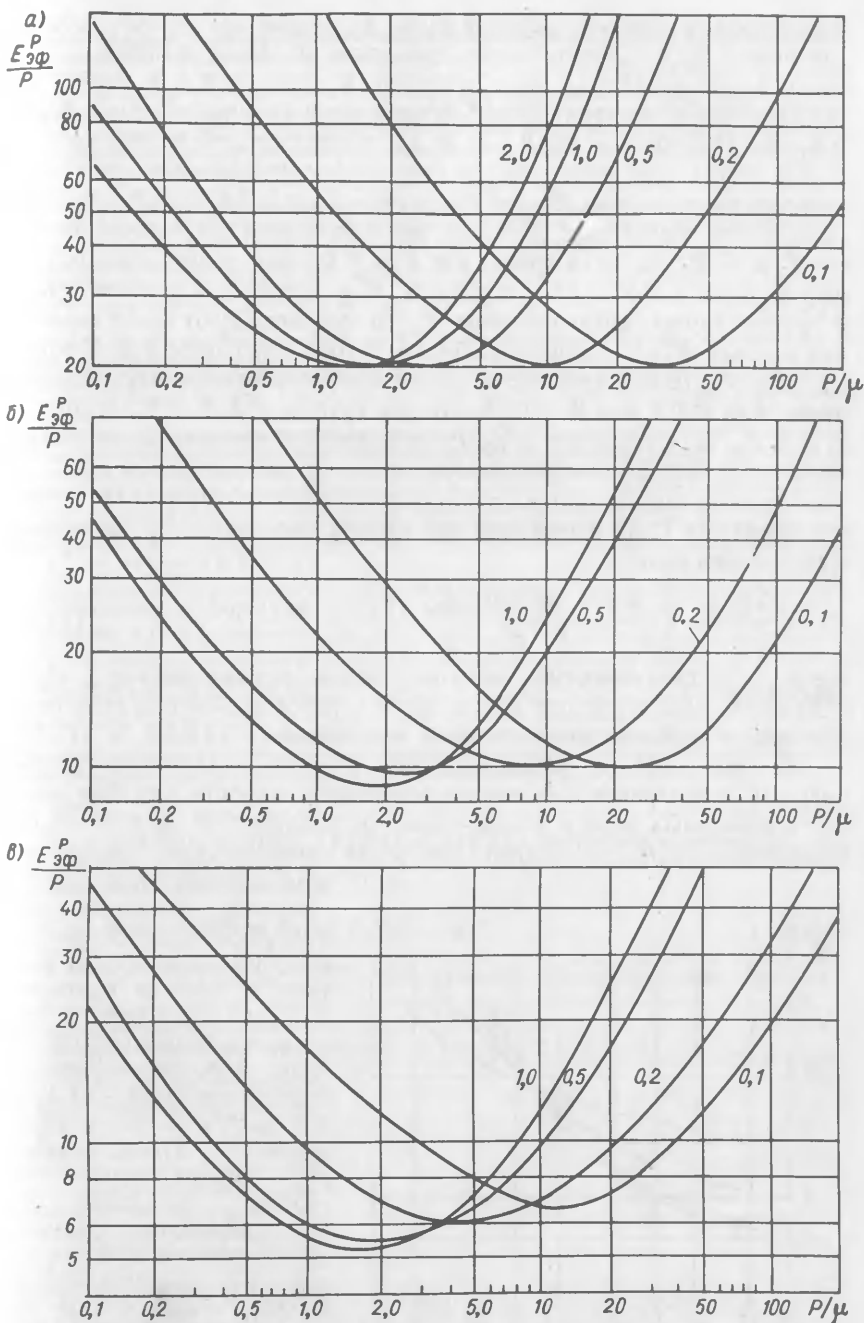


Рис. 3.14. Изменение отношения модуля трубки с радиально закрепленными торцами к статическому давлению с ростом  $P/\mu$ : а -  $\epsilon^2 = 0,2$ ; б -  $\epsilon^2 = 0,4$ ; в -  $\epsilon^2 = 0,6$ .

Числами на кривых указана величина  $h/b$ .

параметров трубки определяется также величиной предельного рабочего давления  $P_{пр}$ . Целесообразно применять перфорированный экранящий слой (трубку) с такой относительной высотой  $h/b$ , чтобы соответствующая ей кривая  $E_{эф}^P/P$  имела минимум при значении  $P/\mu = P_{пр}/\mu$ . Например, если  $P_{пр}/\mu = 13$ , то оптимальной является трубка с  $h/b = 0,1$ ; при таком  $P_{пр}/\mu$  все остальные кривые на рис. 11.8, в лежат выше, и модуль  $E_{эф}^P$  трубок с относительной высотой  $h/b > 0,1$  оказывается значительно большим, чем для трубки с  $h/b = 0,1$ . В области  $P/\mu < P_{пр}/\mu$ , хотя кривая для  $h/b = 0,1$  идет выше остальных кривых, разница в абсолютных значениях  $E_{эф}^P$  получается не столь резкой. В другом случае, когда значения  $P_{пр}/\mu$  соответствуют точке пересечения кривых  $E_{эф}^P/\mu$ , следует выбирать трубку с большим  $h/b$ . К примеру, если  $P_{пр}/\mu = 8$  (это абсцисса точки пересечения кривых с параметрами  $h/b = 0,1$  и  $h/b = 0,2$ ), то для трубки с  $h/b = 0,2$  в области  $P/\mu < P_{пр}/\mu$  отношение  $E_{эф}^P/P$  получается всегда меньшим, чем для трубки с  $h/b = 0,1$  (см. рис. 3.14, в).

Проанализируем динамические характеристики трубки. На основании формулы (1.5) выражение для расчета скорости  $c_{эф}^P$  получается в следующем виде:

$$\frac{c_{эф}^P}{c_t} = \left[ \frac{\mu}{\mu_d} \frac{E_{эф}^P/\mu}{1 - \epsilon_{эф}^P} \right]^{1/2}, \quad (11.50)$$

где  $\mu_d$  — динамический модуль сдвига резины-основы;  $\epsilon_{эф}^P = V/\pi b^2 h$  — концентрация газа в трубке, находящейся под давлением:  $V$  — объем полости, определяемый выражениями (11.34) и (11.35).

На рис. 3.15 с использованием формулы (11.50) и графика рис. 3.14, в построена зависимость отношения скорости в трубке к скорости сдвиговых волн в резине-основе от давления  $P$  для  $\epsilon^2 = 0,6$ . Множитель  $(\mu_d/\mu)^{1/2}$  введен для учета динамических деформаций,

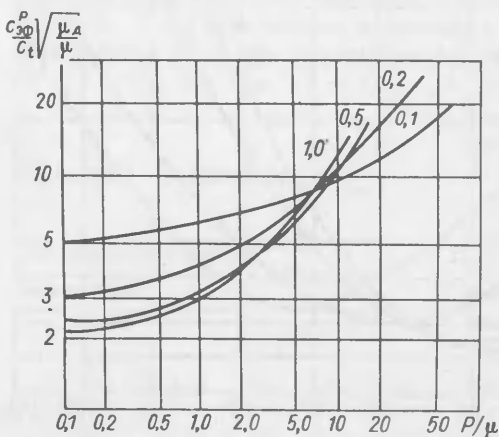


Рис. 3.15. Зависимости скорости в трубке с радиально закрепленными торцами от  $P/\mu$  при различных  $h/b$ .

возникающих при распространении звуковых волн в трубке. График показывает, что абсолютные величины и степень изменения скорости с давлением определяются относительной высотой  $h/b$ . В широком интервале давлений — от  $P/\mu = 0$  до  $P/\mu \leq 10$  — с уменьшением  $h/b$  значения  $c_{эф}^P$  растут, однако, для трубок с меньшими  $h/b$  при изменении давления обеспечивается большая стабильность скорости, чем для высоких трубок. Так, при  $h/b = 0,1$  скорость увеличивается всего в два раза, тогда как при  $h/b = 1,0$  — в шесть раз.

Пористая резина. Решение задачи о больших объемных деформациях сферической оболочки, являющейся моделью пористой резины, даже с применением вариационного способа наталкивается на серьезные математические трудности. Поэтому проведем приближенную оценку поведения пористой резины под давлением, используя метод, разработанный выше для резины с цилиндрическими каналами в случае „скользящих” торцов. Запишем выражения для модуля упругости резиновой сферической оболочки (10.10) при  $\epsilon^3 = \epsilon_0^3$  и  $\epsilon^3 = \epsilon_P^3$ :

$$E_0 = \frac{4}{3} \mu \frac{1 - \epsilon_0^2}{\epsilon_0^2}; \quad (11.51)$$

$$E_P = \frac{4}{3} \mu \frac{1 - \epsilon_P^3}{\epsilon_P^3}, \quad (11.52)$$

где индекс „0” соответствует давлению  $P = 0$ .

Связь концентрации  $\epsilon_P^3$  с относительной объемной деформацией  $\delta$  вычислим из условия неизменности объема монолитной резины при сжатии:

$$\epsilon_P^3 = (\epsilon_0^3 - \delta)/(1 - \delta). \quad (11.53)$$

Подставив в формулу (11.52) значение (11.53) для  $\epsilon_P^3$ , с учетом выражения (11.51) получим

$$E_P = E_0 \epsilon_0^3 / (\epsilon_0^3 - \delta). \quad (11.54)$$

В линейном приближении давление связано с модулем  $E_P$  следующим соотношением:

$$P_{\text{лин}} = \delta E_P. \quad (11.55)$$

На основании формул (11.54) и (11.55) получаем выражение для определения касательного модуля:

$$E_{\text{кас}}^P = dP_{\text{лин}}/d\delta = E_0(\epsilon_0^3)^2/(\epsilon_0^3 - \delta)^2. \quad (11.56)$$

Тогда новую диаграмму сжатия можно вычислить следующим образом:

$$\delta = P_{\text{кас}}/E_{\text{кас}}, \quad (11.57)$$

где  $P_{\text{кас}}$  — давление, определяемое касательным модулем упругости  $E_{\text{кас}}$  сферической оболочки.

Из равенства

$$E = E_{\text{кас}}, \quad (11.58)$$

где

$$E = \frac{4}{3} \mu \frac{1 - \epsilon^3}{\epsilon^3} \quad (11.59)$$

— модуль оболочки в сжатом состоянии;  $\epsilon^3$  — соответствующая концентрация полостей, получим

$$\epsilon^3 = (\epsilon_0^3 - \delta)^2 / [\delta^2 + \epsilon_0^3(1 - 2\delta)]. \quad (11.60)$$

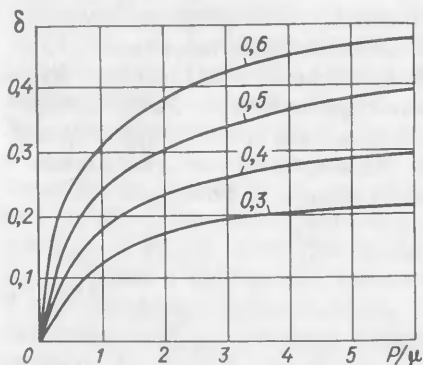


Рис. 3.16. Диаграммы сжатия пористой резины при различной начальной концентрации полостей  $\epsilon_0^3$ .

По аналогии со случаем резины с цилиндрическими каналами найдем истинное давление как полусумму давлений, вычисляемых по формулам (11.55) и (11.57),

$$P = 0,5(P_{\text{лин}} + P_{\text{кас}}). \quad (11.61)$$

С учетом выражений (11.61), (11.55), (11.57), (11.56) и (11.51) получим уравнение, которое определяет диаграмму сжатия пористой резины при объемной деформации:

$$P/\mu = \frac{2}{3} \delta \frac{(1 - \epsilon_0^3)(2\epsilon_0^3 - \delta)}{(\epsilon_0^3 - \delta)^2}. \quad (11.62)$$

Сравнение результатов расчетов диаграмм сжатия по формуле (11.62) (рис. 3.16) и по формуле (11.28) для резины с цилиндрическими каналами (см. рис. 3.10) показывает, что относительные деформации резин со сферическими полостями получаются большими, чем для резин с плотной „упаковкой” цилиндрических полостей при той же начальной концентрации газовых включений.

Для исследования акустических характеристик слоя пористой резины, находящейся под давлением  $P$ , требуется определить зависимость от  $P$  ее продольного модуля  $D_{\text{эф}}^P$ . Вычисляя этот модуль на основании формулы (10.13), получаем

$$D_{\text{эф}}^P = 4\mu \frac{[1 - (\epsilon^3)^2]}{\epsilon^3(3 - \epsilon^3)}, \quad (11.63)$$

где  $\epsilon^3$  — концентрация, которая связана с относительной деформацией  $\delta$  и начальной концентрацией полостей  $\epsilon_0^3$  соотношением (11.60). На рис. 3.17 приведен график изменения  $D_{\text{эф}}^P/\mu$  с давлением, рассчитанный на основании формул (11.63), (11.62) и (11.60), который может быть использован для определения акустических параметров слоя пористой резины, находящейся под давлением, аналогично тому, как это было сделано в случае резины с цилиндрическими каналами (см. рис. 3.15).

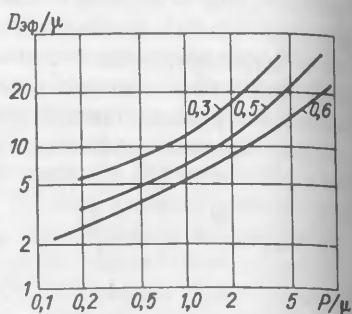


Рис. 3.17. Взаимосвязь продольного модуля пористой резины с давлением для различных  $\epsilon_0^3$ .

## § 12. Решетки из полостей в упругих средах

Решетчатые конструкции отражателей известны давно. Особенно широко они используются в радиолокации [2, 3, 17]. В гидроакустике решетки из полых металлических элементов, в частности, трубок эллиптического сечения, применяются в рефлекторных антеннах [155, 174, 179, 183]. Эффективным отражателем является решетка из цилиндрических полостей в резине [29].

Акустические характеристики подобного рода экранов могут быть определены путем решения задачи о дифракции звуковой волны на решетке. Теории дифракции акустических и в особенности электромагнитных волн на решетках посвящено большое число работ. Во многих из них, начиная с работы Лэмба [83], рассматриваются решетки, состоящие из цилиндров с радиусом, малым по сравнению с длиной волны. Для плоских решеток имеется ряд точных решений при произвольном соотношении характерных размеров решетки с длиной волны (см., например, работы [2, 17, 184]). Одним из эффективных методов, позволяющих решить задачу при произвольных размерах элементов, составляющих решетку, является рассмотрение одиночного элемента, расположенного в центре волновода с абсолютно жесткими стенками, однако, этот способ пригоден лишь для случая нормального падения волны на решетку [24, 146]. Использование теоремы сложения цилиндрических функций [19] позволяет избавиться от введения вспомогательного волновода и непосредственно решить задачу при произвольном угле падения [3, 138].

Решетка из цилиндрических полостей в изотропной упругой среде. Для решетки в изотропной упругой среде задача значительно усложняется вследствие наличия в среде, по крайней мере, двух типов волн — продольной и поперечной. Вопросы дифракции на одиночных полостях в упругой среде исследовались в работах [38, 41, 111, 124]. Было отмечено наличие резонанса, который для сферической полости наступает при  $k_t a = 2$ , а для бесконечной цилиндрической полости — при  $k_t a = 0,7 - 0,8$ , где  $k_t$  — волновое число для сдвиговых волн,  $a$  — радиус полости. Особенно сильное рассеяние на полостях наблюдается в резиноподобной среде, когда резонанс полости обусловлен малостью модуля сдвига  $\mu$ , по сравнению с постоянной Ламе  $\lambda$ , которая для резины соответствует объемному модулю упругости. Задачи о дифракции на решетках из цилиндрических полостей в упругой среде решались в работах [29, 40, 48, 139]. При дальнейшем изложении будем основываться на результатах, полученных в статье [29].

Пусть в изотропной упругой среде на решетку, составленную из  $N$  бесконечных цилиндрических полостей радиуса  $a$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $b$ , под углом  $\theta$  к плоскости решетки падает плоская продольная волна (рис. 3.18), описываемая скалярным потенциалом

$$\Phi_1 = \Phi_0 e^{ik_l(x \cos \theta + y \sin \theta)} \quad (12.1)$$

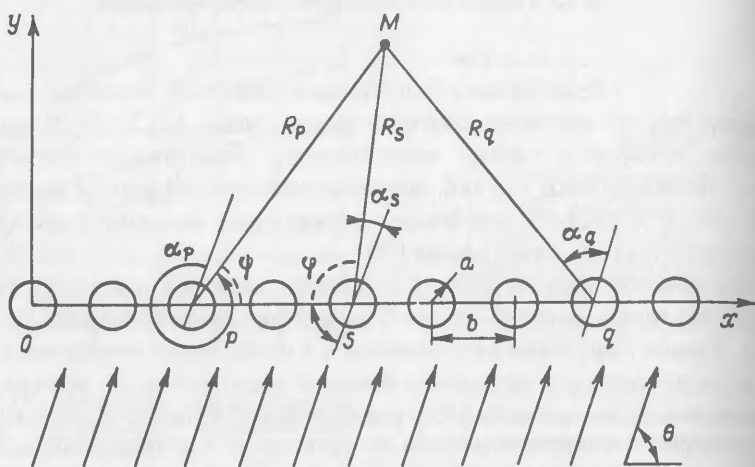


Рис. 3.18. Решетка из параллельных цилиндрических полостей в упругой среде.

Смещение точек среды в рассеянной волне, как известно [79], можно представить в виде суммы

$$u = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Pi},$$

где  $\Phi$  — скалярный потенциал, соответствующий продольным волнам,  $\vec{\Pi}$  — векторный потенциал, соответствующий поперечным (сдвиговым) волнам, причем величины  $\Phi$  и  $\vec{\Pi}$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Phi + k_l^2 \Phi = 0; \quad -\text{rot rot } \vec{\Pi} + k_l^2 \vec{\Pi} = 0.$$

Выразив падающую волну в любой точке  $M$  пространства через координаты цилиндра с номером  $s$  и приняв  $\Phi_0 = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{ik_l bs \cos \theta} + ik_l R_s \cos a_s = \\ &= e^{ik_l bs \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n(k_l R_s) e^{ina_s}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Здесь и далее  $J_n$  — функция Бесселя;  $H_n^{(1)}$  — функция Ханкеля 1-го рода (зависимость от времени взята в форме  $e^{-i\omega t}$ ). В дальнейшем индекс <sup>(1)</sup> для простоты записи опускаем. Смысл величин  $R_s$  и  $a_s$  ясен из рисунка.

Рассмотрим цилиндр с номером  $s$ . Этот цилиндр облучается падающей плоской волной  $\Phi_1$  и волнами, рассеянными всеми остальными цилиндрами. Если обозначить волну, рассеянную цилиндром  $s$

(в присутствии остальных цилиндров) через  $\Phi_s$  и  $\vec{\Pi}_s$ , то потенциалы на поверхности цилиндра будут

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_s + \sum_{p=1}^{s-1} \Phi_p + \sum_{q=s+1}^N \Phi_q; \quad (12.3)$$

$$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_s + \sum_{p=1}^{s-1} \vec{\Pi}_p + \sum_{q=s+1}^N \vec{\Pi}_q. \quad (12.4)$$

Поле в точке  $M$ , рассеянное всей решеткой, определяется как

$$\Phi_M = \sum_{s=1}^N \Phi_s; \quad \vec{\Pi}_M = \sum_{s=1}^N \vec{\Pi}_s,$$

а полное поле

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_M; \quad \vec{\Pi} = \vec{\Pi}_M.$$

Решение задачи будем искать в следующем виде:

$$\Phi_s = e^{ik_1 bs \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(s)} H_n(kR_s) e^{in a_s}; \quad (12.5)$$

$$\Pi_{zs} = \Pi_s = e^{ik_1 bs \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(s)} H_n(k_1 R_s) e^{in a_s}. \quad (12.6)$$

Решение для векторного потенциала вследствие того, что фронт волны параллелен осям полостей, будет содержать только  $z$ -составляющую. Множители  $e^{ik_1 bs \cos \theta}$  введены в связи с тем, что волна, рассеянная на цилиндре с номером  $s$ , сдвинута по фазе на угол  $k_1 bs \cos \theta$  (или  $k_1 bs \cos \theta$ ) по отношению к началу отсчета. Аналогично выразим потенциалы, рассеянные остальными цилиндрами:

$$\Phi_p = e^{ik_1 bp \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(p)} H_n(k_1 R_p) e^{in a_p}; \quad (12.7)$$

$$\Phi_q = e^{ik_1 bq \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(q)} H_n(k_1 R_q) e^{in a_q}; \quad (12.8)$$

$$\Pi_p = e^{ik_1 bp \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(p)} H_n(k_1 R_p) e^{in a_p}; \quad (12.9)$$

$$\Pi_q = e^{ik_1 bq \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(q)} H_n(k_1 R_q) e^{in a_q}. \quad (12.10)$$



В выражениях для скалярных и векторных потенциалов неизвестные постоянные  $A_n^{(p)}$  и  $B_n^{(q)}$  могут быть определены при  $r = a$  из граничных условий

$$\sigma_r = 0; \quad \tau_{ra} = 0, \quad (12.11)$$

где  $\sigma_r$  и  $\tau_{ra}$  соответственно нормальное и тангенциальное напряжения в среде, которые известным образом [85] выражаются через векторный и скалярный потенциалы:

$$\sigma_r = -\lambda k_l^2 \Phi + 2\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + 2\mu \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial R \partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} \right); \quad (12.12)$$

$$\tau_{ra} = 2\mu \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R \partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \left( \frac{k_l^2}{2} \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial R^2} \right) \right]. \quad (12.13)$$

Для того, чтобы решить задачу, необходимо написать выражения (12.7) – (12.10) в цилиндрической системе координат. Ось последней должна совпадать с осью цилиндра номера  $s$ . Переход от одной цилиндрической системы координат к другой можно осуществить, воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций [43]:

$$Y_n(kR_p) e^{in\psi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_{m+n}[kb(s-p)] J_n(kR_s) e^{im\varphi}, \quad (12.14)$$

при условии  $R_s \leq b(s-p)$ , где  $Y_n$  – цилиндрическая функция. С учетом соотношения (12.14) в системе координат, совпадающей с цилиндром  $s$ , потенциалы  $\Phi_p$  и  $\Phi_q$  примут вид:

$$\begin{aligned} \Phi_p &= e^{ik_l b p \cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m^{(p)} H_{m-n}[k_l b(p-s)] \times \\ &\times J_n(k_l R_s) e^{i[na_s + \theta(n-m)]}; \end{aligned} \quad (12.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_q &= e^{ik_l b q \cos \theta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m^{(q)} H_{m-n}[k_l b(q-s)] \times \\ &\times J_n(k_l R_s) e^{i[na_s + \theta(n-m)]} \end{aligned} \quad (12.16)$$

После подстановки выражений (12.1), (12.5), (12.15) и (12.16) в формулу (12.3), получим следующее выражение для скалярного потенциала:

$$\Phi = e^{ik_l b s \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_l R_s) e^{ina_s} [i^n + A_n^{(s)} C_n(k_l R_s) + F_n], \quad (12.17)$$

где

$$C_n(k_l R_s) = [H_n(k_l R_s)] / [J_n(k_l R_s)];$$

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta(n-m)} \left\{ \sum_{p=1}^{s-1} A_m^{(p)} H_{m-n}[k_l b(p-s)] \times \right. \\ &\times e^{ik_l b(p-s) \cos \theta} + \sum_{q=s+1}^N A_m^{(q)} H_{m-n}[k_l b(q-s)] \times \\ &\left. \times e^{ik_l b(q-s) \cos \theta} \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается выражение для векторного потенциала

$$\Pi = e^{ik_l b s \cos \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_l R_s) e^{ina_s} [B_n^{(s)} G_n(k_l R_s) + D_n], \quad (12.18)$$

где

$$G_n(k_l R_s) = [H_n(k_l R_s)] / [J_n(k_l R_s)];$$

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta(n-m)} \left\{ \sum_{p=1}^{s-1} B_m^{(p)} H_{m-n}[k_l b(p-s)] \times \right. \\ &\times e^{ik_l b(p-s) \cos \theta} + \sum_{q=s+1}^N B_m^{(q)} H_{m-n}[k_l b(q-s)] \times \\ &\left. \times e^{ik_l b(q-s) \cos \theta} \right\}. \end{aligned}$$

Значительно более простое решение получается, если решетка бесконечная, т. е. когда  $N \rightarrow \infty$ . Тогда волны с номером  $n$ , рассеянные каждым цилиндром, будут отличаться друг от друга лишь фазовыми множителями, коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  не будут зависеть от номера цилиндра, и количество уравнений уменьшится. Выражения для скалярного и векторного потенциалов в этом случае примут вид

$$\Phi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_l R) [i^n + A_n C_n(k_l R) + F_n] e^{ina_s}; \quad (12.19)$$

$$\Pi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(k_l R) [B_n G_n(k_l R) + D_n] e^{ina_s}, \quad (12.20)$$

где

$$\begin{aligned} F_n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \sum_{p=1}^{+\infty} H_{n-m}(k_l b p) e^{i\theta(n-m)} \times \\ &\times \left[ (-1)^{m-n} e^{-ik_l b p \cos \theta} + e^{ik_l b p \cos \theta} \right]; \quad C_n(k_l R) = \frac{H_n(k_l R)}{J_n(k_l R)}; \end{aligned}$$

$$D_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m \sum_{p=1}^{+\infty} H_{n-m}(k_t b p) e^{i\theta(n-m)} \times \\ \times \left[ (-1)^{m-n} e^{-ik_t b p \cos \theta} + e^{ik_t b p \cos \theta} \right]; \quad G_n(k_t R) = \frac{H_n(k_t R)}{J_n(k_t R)}.$$

Подставив выражения (12.19) и (12.20) в граничные условия (12.11), получим бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$ , зная которые можно рассчитать коэффициент прохождения упругой волны  $t$  через решетку.

Известно, что при прохождении волны через решетку возникают пространственные дифракционные спектры нулевого и высших порядков. Вычислим коэффициент прохождения  $t$  для нулевого спектра. При этом появляется возможность определить  $t$  следующим способом. По аналогии с работой [3], заменим бесконечную решетку ограниченной, составленной из  $2N+1$  цилиндрических полостей ( $N \gg 1$ ), и поместим ее в абсолютно жесткий экран, расположенный в плоскости решетки ( $y=0$ ) со щелью  $x = \pm (2N+1)b/2$ . Тогда коэффициент прохождения через решетку можно определить как

$$t = 1 + \sigma_r^{(p)} / \sigma_r^{(n)}, \quad (12.21)$$

где  $\sigma_r^{(n)}$  — нормальная к фронту волны составляющая напряжения, создаваемого прошедшей через отверстие в экране волной в точке  $M$  при отсутствии решетки;  $\sigma_r^{(p)} = -\lambda k_t^2 \Phi_M^{(p)}$  — нормальная к фронту волны составляющая напряжения, создаваемого рассеянной решеткой волной в точке  $M$ . При этом необходимо, чтобы выполнялось условие  $k_t R_s \gg N k_t b$ , где  $R_s$  — расстояние до точки  $M$  (см. рис. 12.1). С учетом формулы (12.12) выражение (12.21) запишем в следующем виде:

$$t = 1 + \frac{\Phi_M^{(p)}}{\Phi_M^{(n)}} - \frac{2}{k_t^2} \frac{\left[ \frac{\partial^2 \Phi_M^{(p)}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Pi_M^{(p)}}{\partial R \partial \alpha} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Pi_M^{(p)}}{\partial \alpha} \right]}{\Phi_M^{(n)}}, \quad (12.22)$$

где  $\Phi_M^{(n)}$ ,  $\Phi_M^{(p)}$  и  $\Pi_M^{(p)}$  — скалярные и векторный потенциалы в падающей и рассеянной волнах.

Для вычисления  $t$  найдем эти величины. Определим скалярный потенциал волны, прошедшей через отверстие в экране без решетки

$$\Phi_M^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \frac{e^{ik_t R}}{R} dS, \quad (12.23)$$

где  $\Phi_1$  — потенциал волны в раскрыве экрана.

Определяя  $\Phi_1$  по формуле (12.1), учитывая соотношение, известное из работы [43]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik_l \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2 + z^2}} dz = i\pi H_0[k_l \sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}] =$$

$$= i\pi H_0[k_l (R - x \cos \theta)],$$

и замечая, что в рассматриваемом случае

$$\partial\Phi_1/\partial n = \partial\Phi_1/\partial y,$$

получаем для потенциала в дальнем поле с учетом асимптотического разложения функции Ханкеля [43] выражение

$$\Phi_M^{(n)} = \frac{k_l \sin \theta}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k_l R}} e^{i(k_l R - \pi/4)} bN. \quad (12.24)$$

Представляя скалярный потенциал в волне, рассеянной решеткой, в виде разложения

$$\Phi_M^{(p)} = \sum_{s=1}^N \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n(k_l R_s) e^{ina_s}$$

и учитывая, что

$$R_s = R + bs[\cos \theta + \cos(\alpha + \theta)];$$

$$H_n(k_l R_s) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_l R}} e^{i(k_l R + k_l bs[\cos \theta - \cos(\alpha + \theta)] + n\pi/2 - \pi/4)},$$

получаем

$$\Phi_M^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{\pi k_l R}} e^{i(k_l R - \pi/4)} \frac{\sin \left\{ \frac{Nk_l b}{2} [\cos \theta - \cos(\alpha + \theta)] \right\}}{\sin \left\{ \frac{k_l b}{2} [\cos \theta - \cos(\alpha + \theta)] \right\}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n A_n e^{ina}. \quad (12.25)$$

Заменив в формуле (12.25) значения  $k_l$  на  $k_l$  и  $A_n$  на  $B_n$ , можно получить выражение для векторного потенциала в рассеянной волне. Подставив функции  $\Phi_M^{(n)}$ ,  $\Phi_M^{(p)}$  и  $\Pi_M^{(p)}$  в формулу (12.22) и приняв  $\alpha = \theta$ , получим коэффициент прохождения для решетки в изотропной упругой среде с произвольным коэффициентом Пуассона.

Остановимся подробнее на анализе поведения решетки в резиноподобной среде. Поскольку для такой среды  $\mu \ll \lambda$ , вдали от решетки можно пренебречь сдвиговыми деформациями, которые концентрируются в основном вблизи полостей. Следовательно, в формуле (12.22)

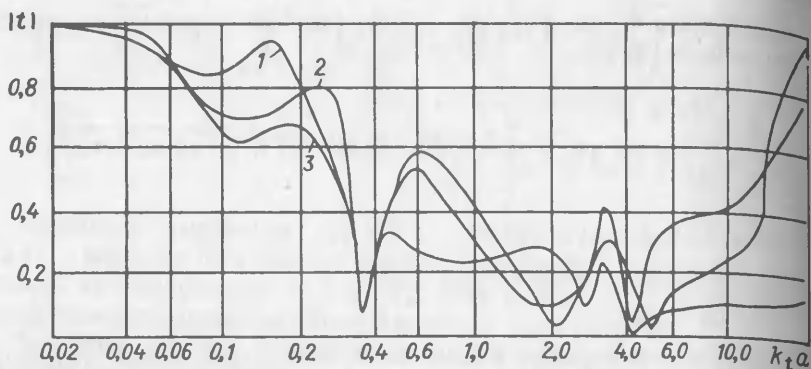


Рис. 3.19. Зависимость модуля коэффициента прохождения через решетку из параллельных цилиндрических полостей в резине от волнового радиуса.

1 -  $\epsilon = 0,34$ ; 2 -  $\epsilon = 0,54$ ; 3 -  $\epsilon = 0,8$ .

можно положить  $\Pi_M^{(p)} = 0$ . Кроме того, анализ выражения (12.22) показывает, что для резиноподобной среды выполняется неравенство

$$\frac{2}{k_t^2} \frac{\partial^2 \Phi_M^{(p)} / \partial R^2}{\Phi_M^{(n)}} \ll 1 + \frac{\Phi_M^{(p)}}{\Phi_M^{(n)}}.$$

Тогда выражение для коэффициента прохождения получается в следующем виде:

$$t = 1 + \frac{2}{k_1 b \sin \theta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n A_n. \quad (12.26)$$

Решение бесконечной системы уравнений и расчет модуля коэффициента прохождения  $|t|$  по формуле (12.26) для решетки в резиноподобной среде с отношением  $\lambda/\mu = 200$  были проведены на вычислительной машине БЭСМ-2\*. Исследовались зависимости  $|t|$  от величины  $k_1 a$  (рис. 3.19) при нормальном ( $\theta = 90^\circ$ ) падении плоской продольной упругой волны на решетку с параметрами  $\epsilon = a/b' = 0,34$  (кривая 1), 0,54 (кривая 2) и 0,8 (кривая 3), где  $b' = b/2$ . В области значений  $k_1 a < 0,04$  упругая волна практически полностью проходит через решетку. С увеличением  $k_1 a$  коэффициент прохождения начинает падать. При  $k_1 a = 0,35$  наблюдается значительное — почти до нуля — уменьшение  $|t|$ , которое является следствием резонанса цилиндрических полостей. Известно [111, 124], что отражение упругой волны от полости можно характеризовать поперечником рассеяния, размеры которого в области резонанса полости существенно возрастают. В решетке поперечники рассеяния перекрывают друг друга, что обуславливает

\* Расчеты проводились В. И. Рабиновичем.

значительное уменьшение коэффициента прохождения через решетку. Понижение резонансной частоты полостей в решетке по сравнению с резонансом одиночной цилиндрической полости, который для нулевой моды колебаний расположен в области  $k_1 a = 0,7-0,9$  [38], является следствием взаимодействия полостей, причем во взаимодействии, кроме нулевой, участвуют все высшие моды колебаний, учитывавшиеся при расчете. Следует отметить, что общий уровень коэффициента прохождения в области  $k_1 a = 0,08-2,0$  с увеличением параметра  $\epsilon$ , т. е. при более тесном расположении полостей, падает. При  $k_1 a > 4,0$  наблюдается тенденция роста  $|t|$ . В области  $k_1 a > (20-30)$  расчет весьма неточен из-за плохой сходимости рядов; поэтому значения  $|t|$  для таких  $k_1 a$  не были получены. Однако при дальнейшем увеличении  $k_1 a$  можно ожидать появления резонансов, обусловленных также продольными волнами.

В связи с тем, что монолитная резина является водоподобной средой [160], закономерности, наблюдаемые для решетки в безграничном резиновом массиве, останутся справедливыми и для слоя резины с решеткой из цилиндрических полостей, помещенного в воду.

**Решетка из упругих элементов\***. Один из методов построения экранов состоит в применении решеток, образованных упругими элементами, расположенными в воде в определенном порядке. В качестве таких элементов могут быть использованы герметичные трубки эллиптического сечения [183], жесткие цилиндры с упругими крышками [24] и т. п. Достоинством экранов этого типа является возможность обеспечения хорошей звукоизоляции при сравнительно высокой прочности элементов. В работах [24, 179] получено точное решение задачи о дифракции звука на таких решетках.

Рассмотрим приближенную теорию прохождения звука через плоскую бесконечную решетку, составленную из элементов, изображенных на рис. 3.20. Корпус элемента выполнен из материала с волновым сопротивлением  $\rho c$  в виде шайбы, отверстие которой закрыто двумя одинаковыми пластинами, образующими герметичную полость. В дальнейшем такой элемент будем называть экранирующей пластинчатой конструкцией (ЭПК). ЭПК образуют плоскую регулярную решетку, перпендикулярно поверхности которой из нижнего полупространства падает звуковая волна. В силу симметрии задачи свойства решетки эквивалентны свойствам ее элементарной ячейки, изображенной на рис. 3.20 между вертикальными штриховыми линиями и представляющей собой элемент ЭПК, расположенный в волноводе с абсолютно жесткими стенками.

Для определения звукоизолирующих свойств решетки восполь-

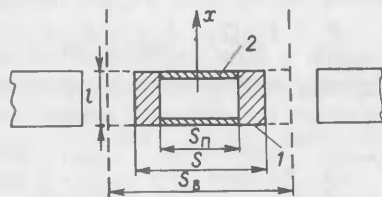


Рис. 3.20. Решетка из упругих элементов ЭПК.

\* Эта часть параграфа написана А. В. Михайловым.

зуемся методом четырехполюсников, связав уравнениями четырехполюсника [6] действующие на поверхностях 1 и 2 силы и средние скорости. Если эти уравнения записаны в  $Y$ -форме, то используя теорему об эквивалентном генераторе, коэффициент прохождения можно представить в виде:

$$\tau = \frac{-2Y_2 Z_H}{1 + Z_0 Y_1 - Z_H [Z_0 (Y_2^2 - Y_1^2) - Y_1]}, \quad (12.27)$$

где  $Y_1, Y_2$  – параметры четырехполюсника;  $Z_0, Z_H$  – сопротивления излучения ячейки в каждое из полупространств. В рассматриваемом случае принимаем  $Z_0 = Z_H = Z$ .

Известно [24, 179, 183], что решетка обладает наибольшей звукоизоляцией вблизи резонансной частоты элементов, если расстояние между ними не превышает половины длины звуковой волны. Легко показать, что отношение поперечного размера пластины к длине волны в воде на резонансной частоте пластины имеет тот же порядок, что и отношение толщины пластины к ее поперечному размеру. Полагая, что расстояния между элементами невелики, можно считать малыми волновые размеры ячейки. При этом, согласно [115], мала неравномерность распределения звукового давления по сечению волновода, и для вычисления акустических характеристик целесообразно пользоваться средними по сечению значениями давления и скорости. В этом случае в выражении (12.27) следует использовать активную составляющую импеданса

$$Z = (\rho c)_B S_B,$$

где  $S_B$  – площадь поперечного сечения волновода.

Реактивная составляющая сопротивления излучения, метод определения которой изложен в работе [115], влияет на колебания элемента и может быть учтена в составе четырехполюсника путем введения присоединенных масс.

Силы, действующие на поверхностях ячейки, равны

$$F_{Bq} = p_q S_B, \quad (12.28)$$

где  $p_q$  – звуковое давление в плоскости 1 или 2,  $q = 1, 2$ .

Силы, действующие в плоскостях 1 и 2 на ЭПК ( $F_q$ ) и на слой жидкости между ЭПК ( $F_{жq}$ ), пропорциональны занимаемой ими площади

$$F_q = F_{Bq} \Omega_1; \quad F_{жq} = F_{Bq} (1 - \Omega_1), \quad (12.29)$$

где  $\Omega_1 = S/S_B$  – коэффициент концентрации ЭПК в решетке.

Учитывая выражения (12.29), образуем соответствующий элементарной ячейке обобщенный четырехполюсник, эквивалентная схема которого представлена на рис. 3.21. Сила  $F_{B1}$  образована суммой падающей и отраженной волн на поверхности ячейки, сила  $F_{B2}$  создается звуковым давлением в прошедшей волне. Параметры

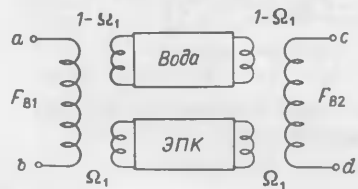


Рис. 3.21. Эквивалентная схема ячейки.

четырёхполюсника (между точками  $a, b, c, d$ ) в  $Y$ -форме имеют следующий вид:

$$Y_1 = Y_{1a} \Omega_1^2 + Y_{1b} (1 - \Omega_1)^2; \quad Y_2 = Y_{2a} \Omega_1^2 + Y_{2b} (1 - \Omega_1)^2, \quad (12.30)$$

где  $Y_{1a}, Y_{2a}$  – параметры ЭПК, которые предстоит определить,

$$Y_{1a} = \frac{i}{[(\rho c)_B S_B (1 - \Omega_1) \operatorname{tg} kl]}; \quad Y_{2a} = \frac{-i}{[(\rho c)_B S_B (1 - \Omega_1) \sin kl]} \quad (12.31)$$

– параметры слоя воды;  $kl$  – волновая толщина слоя.

Рассматривая движение ЭПК под действием сил  $F_1$  и  $F_2$ , будем считать, что смещения боковой поверхности ЭПК в плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , отсутствуют. Смещения поверхностей ЭПК в плоскостях 1 и 2 запишем в виде

$$w_q(S) = w_{кq} + w_{иq} \psi(S_{п}), \quad (12.32)$$

где  $\psi(S_{п})$  – форма поперечных колебаний пластин;  $w_{кq}$  – смещение опорного контура пластины;  $w_{иq}$  – амплитуда поперечных колебаний центра пластины.

Средняя скорость верхней и нижней поверхностей ЭПК равна

$$v_q = \frac{1}{S} \int_S \dot{w}_q dS = v_{кq} + v_{иq} \Omega, \quad (12.33)$$

где

$$v_{кq} = \dot{w}_{кq}; \quad v_{иq} = \dot{w}_{иq} \xi_S;$$

$$\xi_S = \frac{1}{S_{п}} \int_{(S_{п})} \psi(S_{п}) dS_{п}; \quad (12.34)$$

$\Omega = S_{п}/S$  – часть площади, занимаемая пластиной.

На каждую пластину действуют силы звукового давления  $F_{пq} = F_q \Omega$ , силы инерции присоединенной массы  $M_S$  жидкости

$$F_{Mq} = -i\omega M_S (v_{кq} + v_{иq})$$

и реакция на опорном контуре  $F_{rq}$ . Вычислив кинетическую и потенциальную энергию пластин, приняв в качестве обобщенных координат значения  $w_{кq}$  и  $w_{иq}$ , легко получить уравнения Лагранжа для пластин в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} Z_M v_{кq} + Z_a v_{иq} &= \pm F_{пq}; \\ Z_M (v_{кq} + v_{иq}) &= \pm F_{пq} - F_{rq}, \end{aligned} \right\} \quad (12.35)$$

где знак „+“ перед величиной  $F_{пq}$  относится к пластине 1, знак „-“ – к пластине 2;

$$Z_M = -i\omega (M + M_S);$$

$Z_a = Z_{пp}/\xi_S^2$  – механический импеданс пластины;

$$Z_{np} = -\xi_m i \omega M_{np} \left( 1 + \frac{M_S}{M} \xi \right) \left[ 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{M_S}{M} \xi} \right]$$

— ее приведенный импеданс;  $\omega_p$  — резонансная частота пластины в вакууме на неподвижных опорах;  $M$  — масса пластины;  $M_{np} = M \xi_m$  — ее приведенная масса;

$$\xi_m = \frac{1}{S_{\Pi}} \int_{(S_{\Pi})} \psi^2(S_{\Pi}) dS_{\Pi}; \quad (12.36)$$

$$\xi = \frac{\xi_S^2}{\xi_m}. \quad (12.37)$$

Различия между типами ЭПК по форме пластин и условиям их закрепления на контуре заключаются только в величине коэффициента  $\xi$ . Как показывает опыт, в достаточно широком для практики диапазоне частот можно считать, что пластина колеблется на первой моде. При этом значения  $\xi_S$  и  $\xi_m$  на основании выражений (12.34) и (12.36) легко определяются [100]. Приведенные ниже результаты расчетов относятся к круглой пластине с опертыми краями, для которой  $\xi = 0,68$ . Принимая во внимание, что на корпус ЭПК действуют внешнее звуковое давление и силы реакции пластины  $F_{rq}$ , определяемые из второго выражения (12.35), представляя слой в виде четырехполюсника, на основании выражений (12.35) получим систему уравнений, описывающую движение ЭПК:

$$\left. \begin{aligned} Z_a v_{и1} + Z_M v_{к1} &= F_1 \Omega; \\ Z_a v_{и2} + Z_M v_{к1} &= -F_2 \Omega; \\ -Z_{c1} v_{к1} + Z_{c2} v_{к2} &= F_1 - Z_M (v_{к1} + v_{и1}); \\ -Z_{c2} v_{к1} + Z_{c1} v_{к2} &= F_2 + Z_M (v_{к2} + v_{и2}), \end{aligned} \right\} \quad (12.38)$$

где  $Z_{c1} = [-i \rho c S (1 - \Omega)] / \operatorname{tg} \beta l$ ;  $Z_{c2} = [-i \rho c S (1 - \Omega)] / \sin \beta l$  — параметры слоя при  $Z$ -форме записи [6];  $\beta l$  — волновая толщина корпуса.

Учитывая выражение (12.33) и проводя несложные алгебраические преобразования, из системы (12.38) легко получаем уравнения четырехполюсника для ЭПК в  $Y$ -форме:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= F_1 Y_{13} + F_2 Y_{23}; \\ -v_2 &= F_1 Y_{23} + F_2 Y_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (12.39)$$

Практически наиболее интересен случай малых волновых толщин корпуса ( $\beta l \ll 1$ ). При этом

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{1\varepsilon} &= \frac{\Omega^2}{Z_a} + \frac{\left(1 - \frac{Z_M}{Z_a} \Omega^2\right) \left[2 \left(1 - \frac{Z_M}{Z_a}\right) + \frac{M_k}{2M} - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right]}{2Z_M \left(1 + \frac{M_k}{2M} - \frac{Z_M}{Z_a}\right) \left(1 - \frac{Z_M}{Z_a} - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)}; \\
 Y_{2\varepsilon} &= \frac{\left(1 - \frac{Z_M}{Z_a} \Omega^2\right) \left(\frac{M_k}{2M} + \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)}{2Z_M \left(1 + \frac{M_k}{2M} - \frac{Z_M}{Z_a}\right) \left(1 - \frac{Z_M}{Z_a} - \frac{\omega_k^2}{\omega^2}\right)},
 \end{aligned} \right\} (12.40)$$

где  $M_k$  — масса корпуса;  $\omega_k^2 = 2K/M$ ;  $K = [\rho c^2 S (1 - \Omega)] / l$  — жесткость корпуса при продольных колебаниях.

Рассмотрим влияние конструктивных характеристик решетки на ее звукоизоляцию. Из-за наличия присоединенной массы импеданс пластины  $Z_a$  обращается в нуль на частоте

$$\omega_0 = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + M_S/M\xi}}. \quad (12.41)$$

Из выражения (12.27) следует, что при выполнении условия  $Y_2 = 0$  звуковая волна не проходит через решетку ( $t = 0$ ). При сплошном заполнении решетки элементами ЭПК ( $\Omega_1 = 1$ ) это условие выполняется на частоте  $\omega_1$ , равной

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \xi\Omega}}. \quad (12.42)$$

т. е. выше частоты резонанса пластины в воде. Анализ выражения (12.27) показывает, что при условии

$$1 + (|Y_1|^2 - |Y_2|^2) [(\rho c)_B S_B]^2 = 0$$

решетка становится полностью звукопрозрачной ( $|t| = 1$ ). Отметим, что ни на частоте  $\omega_p$ , ни на частоте  $\omega_0$  коэффициент прохождения не принимает предельных значений.

На рис. 3.22 качественно показана частотная зависимость величины  $Y_2(\rho c)_B S_B$  для ЭПК с недеформируемым корпусом ( $\omega/\omega_k = 0$ ) при значении  $\Omega = 1$ . При сплошном заполнении ( $\Omega_1 = 1$ ) решетки элементами с невесомым корпусом ( $M_k = 0$ ) частотная характеристика проводимости (кривая 1) имеет разрыв на частоте  $\omega_0$ . Выше частоты  $\omega_1$  она мало отличается от нуля, что характеризует низкий уровень прохождения звука и подтверждается кривой 1 на рис. 3.23. Если масса корпуса конечна, при выполнении условия

$$1 + \frac{M_k}{2M} - \frac{Z_M}{Z_0} = 0 \quad (12.43)$$



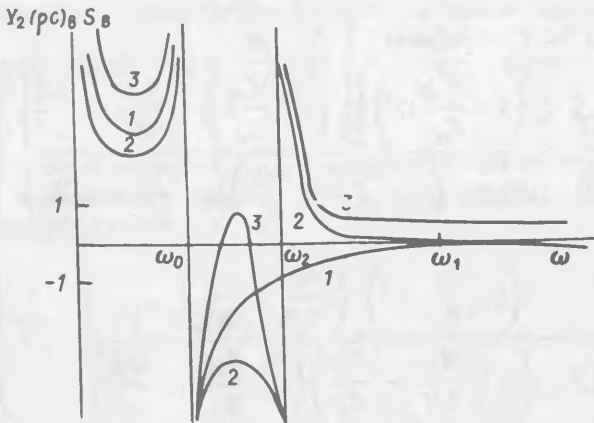


Рис. 3.22. Частотная зависимость относительной проводимости  $Y_2(\rho c)_{B S_B}$ .

появляется второй разрыв частотной характеристики (кривая 2 на рис. 3.22) на частоте

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 / \left[ 1 - \xi / \left[ (1 + M_K / 2M) (1 + M_S / M\xi) \right] \right], \quad (12.44)$$

лежащей в интервале  $\omega_0, \omega_1$ . В интервале  $\omega_2, \omega_0$  проводимость  $Y_2$  имеет экстремум, которому соответствует минимум на частотной зависимости коэффициента прохождения (кривые 2–4 на рис. 3.23).

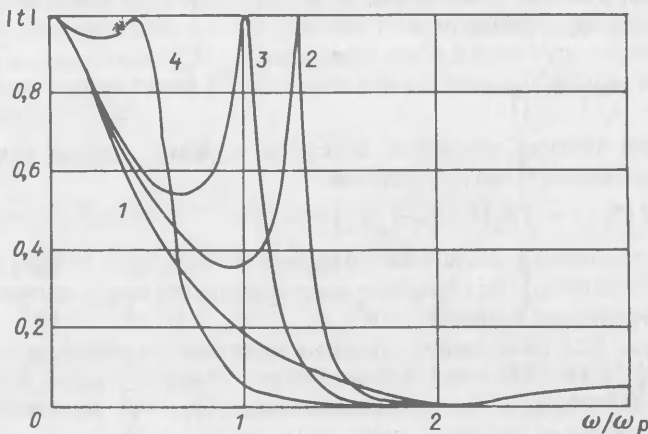


Рис. 3.23. Частотная зависимость коэффициента прохождения при сплошном заполнении ( $\Omega_1 = 1$ ) решетки элементами ЭПК.

Параметр кривых – отношение массы корпуса  $M_K$  к массе пластины  $M$ .

1 –  $M_K/M = 0$ ; 2 –  $M_K/M = 0,5$ ; 3 –  $M_K/M = 1,0$ ; 4 –  $M_K/M = 5,0$ . Параметр  $\Omega = 1$ .

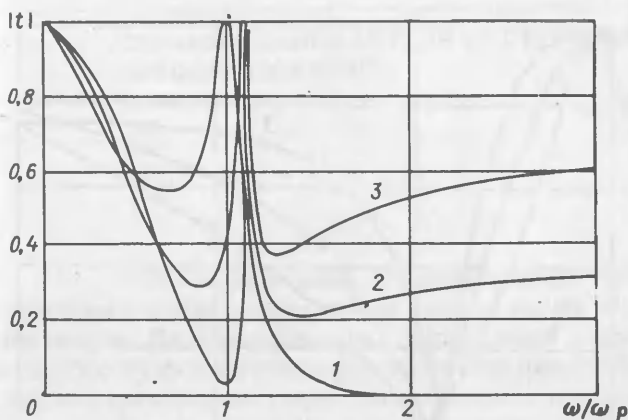


Рис. 3.24. Влияние коэффициента концентрации ЭПК  $\Omega_1$  на звукопрозрачность решетки.

1 —  $\Omega_1 = 1$ ; 2 — 0,8; 3 — 0,6. Параметр  $\Omega = 1$ .

С увеличением массы корпуса этот минимум смещается в сторону низких частот, а его уровень повышается. Одновременно расширяется область малых значений коэффициента прохождения вблизи частоты  $\omega_1$ .

Слой воды между ЭПК оказывает большое влияние на прохождение звука, поскольку его проводимость  $Y_{2в}$  при малой толщине решетки определяется массой воды в слое и значительно превосходит проводимость ЭПК на высоких частотах. Кривая 3 на рис. 3.22 относится к случаю, когда величина  $\Omega_1 < 1$ . С уменьшением коэффициента концентрации максимум на кривой 3 в интервале  $\omega_2$ ,  $\omega_0$  повышается, что приводит к увеличению провала на частотной зависимости коэффициента прохождения (кривые 1, 2 на рис. 3.24). При достаточно малом значении  $\Omega_1$  кривая 3 на рис. 3.22 дважды пересекает ось  $\omega$  в интервале  $\omega_2$ ,  $\omega_0$ , причем расстояние между нулями функции уменьшается с ростом массы корпуса. Это соответствует появлению двух нулевых значений коэффициента прохождения (кривая 2 на рис. 3.25). С ростом частоты, по мере ослабления влияния податливости пластин, величина  $|t|$  стремится к коэффициенту прохождения звука через жесткий неподвижный экран с отвер-

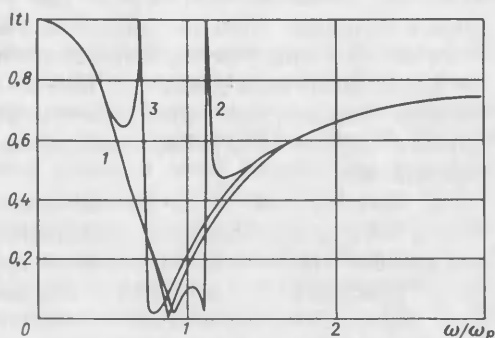


Рис. 3.25. Влияние массы корпуса  $M_K$  на звукопрозрачность решетки при  $\Omega = 1,0$ ;  $\Omega_1 = 0,5$ .

1 —  $M_K/M = 0$ ; 2 — 1; 3 — 100.

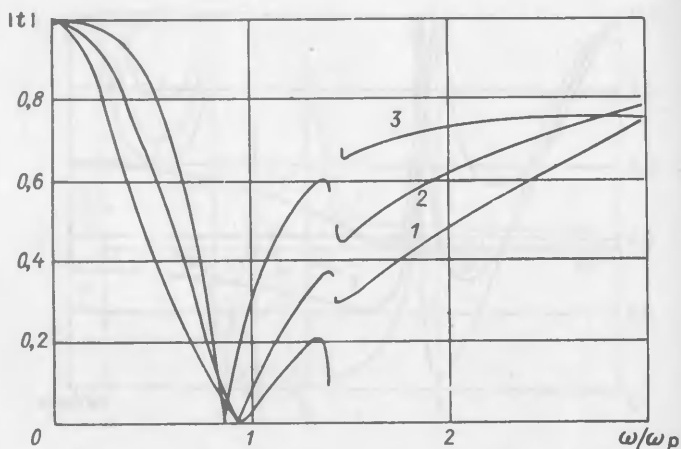


Рис. 3.26. Изменение ширины полосы частот эффективной звукоизоляции для решетки из ЭПК с  $\Omega_1 = 0,7$ ;  $\Omega = 0,65$ .

Параметр кривых — характеристическое сопротивление пластин  $X$ : 1 —  $X = 0,14$ ; 2 —  $0,21$ ; 3 —  $0,415$ .

стиями [138]. При не очень большом коэффициенте концентрации ( $\Omega_1 = 0,5$ , рис. 3.25) влияние массы корпуса сказывается лишь в области  $\omega_2$ ,  $\omega_0$ . Вне этой области из-за шунтирующего действия слоя воды инерционные свойства ЭПК в переносном движении несущественны.

Нетрудно видеть, что уменьшение коэффициента концентрации  $\Omega$  приводит примерно к тем же эффектам в интервале  $\omega_2$ ,  $\omega_0$ , что и уменьшение величины  $\Omega_1$ , при этом уровень прохождения на высоких частотах возрастает за счет увеличения общей жесткости конструкции. Если жесткости корпуса конечна, но превосходит приведенную жесткость пластины, на зависимости  $Y_2(\omega)$  (см. рис. 3.22) появляется еще один разрыв функции. Расчеты, однако, показывают, что связанные с этим особенности в практически интересных случаях проявляются в исчезающе малом частотном диапазоне. Можно считать, что при  $\omega_k/\omega_p > 2,5$  влияние податливости корпуса несущественно. При малой жесткости корпуса ( $\omega_k/\omega_p < 0,5$ ) несущественными оказываются упругие свойства пластин.

С практической точки зрения важно иметь достаточно широкую полосу частот, в которой мал уровень прохождения звука. В значительной степени эта полоса определяется характеристическим сопротивлением пластины  $X = \omega_p M / \xi$  и тем шире, чем меньше эта величина (рис. 3.26). Однако уменьшение значения  $X$ , как правило, связано с понижением прочности ЭПК, что составляет основное техническое противоречие для такого рода экранов. Экспериментальные исследования показывают возможность использования рассмотренного метода расчета решеток на основе ЭПК до частот порядка  $(2,5-3,0)\omega_p$ .

Разнообразие типов гидроакустических антенн не позволяет разработать общие методы оценки влияния акустических экранов на их параметры. По классификации, предложенной в работе [115], антенны по способу формирования характеристик направленности можно разделить на три основные группы: непрерывные и дискретные, фокусирующие, рупорные. Расчет характеристик фокусирующих (в частности, рефлекторных) и рупорных антенн, применяемых как в гидро- и электроакустике, так и в радиолокации, с учетом свойств экранов, входящих в состав этих антенн как их неотъемлемая часть, освещен в работах [3, 93, 115, 122]. Поэтому в настоящем разделе рассматриваются вопросы влияния акустических экранов на параметры первой группы антенн. Поскольку свойства непрерывных и в особенности дискретных антенн определяются параметрами преобразователей, из которых состоят эти антенны, основное внимание уделено описанию свойств отдельных экранированных преобразователей.

Широкое распространение получили антенны из совокупности стержневых преобразователей [68, 93, 96] (см., например, рис. 1.13). Такие преобразователи в многоэлементной антенне выполняются либо не связанными между собой механически, либо закрепляются на общей накладке [93, 109]. Корпус может быть заполнен маслом или содержать воздух (наподобие преобразователя Ланжевена-Шиловского). Чтобы звуковая энергия излучалась в заданном направлении (в рабочее полупространство), обратная сторона антенны экранируется — с целью устранения или уменьшения излучения в тыл [68, 115].

Для установления основных закономерностей, связанных с влиянием экрана на акустические параметры антенны, состоящей из стержневых пьезокерамических преобразователей, будем полагать, что размеры неэкранированной (рабочей) и экранированной поверхностей антенны велики по сравнению с длиной волны в воде. Рассмотрим акустико-механический КПД и звуковое давление на оси характеристики направленности в рабочем и тыльном полупространствах, поскольку именно эти параметры зависят от акустических свойств экрана. Расчетные соотношения получим на основе теории стержневых преобразователей, которая была развита рядом советских и зарубежных авторов [4, 76, 88, 103, 127, 130]. В СССР наиболее полные результаты получены Л. Я. Гутиным, разработавшим методы расчета магнитострикционных и пьезоэлектрических преобразователей, применяемых в гидроакустике [50]. В работах Л. Я. Гутина, как и в ряде последующих работ [60, 63, 108], предполагается, что преобразователь является либо двухсторонним,

когда обе его активные поверхности колеблются в воде, либо односторонним, когда одна из поверхностей преобразователя контактирует с вакуумом и является полностью разгруженной. Учет влияния свойств реальных экранов на параметры преобразователей проведем, включив входной импеданс экранирующего слоя в эквивалентную схему стержневого преобразователя [36].

### § 13. Акустико-механический КПД

При оценке изменения акустико-механического КПД экранированного стержневого излучателя (рис. 4.1) в зависимости от свойств экрана достаточно исследовать механическую часть эквивалентной схемы преобразователя (рис. 4.2). Четырехполюсник *I* может быть либо накладкой, либо системой из накладки и переходных слоев; четырехполюсник *II* служит экраном, а в общем случае может представлять собой экранированную накладку преобразователя. Здесь и далее:  $(\rho\bar{c})_к = (\rho c)_к (1 - i\eta_c)$ ;  $(\rho c)_н$  – волновые сопротивления пьезокерамики и материала накладки;  $Z_3/S = R_3 + iX_3$ ;  $Z_н/S = R_н + iX_н$  – комплексные удельные входные импедансы экрана и накладки;  $k, d$  – волновое число в накладке и ее толщина;  $a = S_1/S$  – отношение площади поперечного сечения накладки к площади поперечного сечения пьезостержня длиной  $l$ .

Определим удельное механическое сопротивление  $Z'_м = Z'_м/S$  эквивалентной схемы:

$$Z'_м = \frac{[(\rho\bar{c})_к^2 + a Z_н Z_3] \operatorname{sh} \gamma l + (\rho\bar{c})_к (a Z_н + Z_3) \operatorname{ch} \gamma l}{2(\rho\bar{c})_к (\operatorname{ch} \gamma l - 1) + (a Z_н + Z_3) \operatorname{ch} \gamma l}. \quad (13.1)$$

Представляя  $\operatorname{sh} \gamma l$  и  $\operatorname{ch} \gamma l$  через функции одного аргумента, из формулы (13.1) находим

$$Z'_м = R_м + iX_м = \frac{R_1 + iX_1}{R_2 - iX_2}, \quad (13.2)$$

где

$$R_м = (R_1 R_2 - X_1 X_2) / (R_2^2 + X_2^2); \quad X_м = (R_1 X_2 + R_2 X_1) / (R_2^2 + X_2^2);$$

$$R_1 = \cos \beta l \left\{ [(\rho c)_к^2 + a R_н R_3 - a X_н X_3] \operatorname{sh} al + \right. \\ \left. + (\rho c)_к (a R_н + R_3) \operatorname{ch} al \right\} + \sin \beta l [a (X_н R_3 + X_3 R_н) \operatorname{ch} al + \\ + (\rho c)_к (a X_н + X_3) \operatorname{sh} al];$$

$$X_1 = \cos \beta l [a (X_н R_3 + X_3 R_н) \operatorname{sh} al + (\rho c)_к (a X_н + X_3) \operatorname{ch} al] - \\ - \sin \beta l \left\{ [(\rho c)_к^2 + a (R_н R_3 - X_н X_3)] \operatorname{ch} al + (\rho c)_к (a R_н + R_3) \operatorname{sh} al \right\};$$

$$R_2 = \cos \beta l [(a R_н + R_3) \operatorname{sh} al + 2(\rho c)_к \operatorname{ch} al] + \\ + \sin \beta l (a X_н + X_3) \operatorname{ch} al - 2(\rho c)_к;$$

$$X_2 = -\cos \beta l (a X_н + X_3) \operatorname{sh} al + \sin \beta l [2(\rho c)_к \operatorname{sh} al + (a R_н + R_3) \operatorname{ch} al];$$

$(\rho c)_к = |(\rho\bar{c})_к|$  – модуль волнового сопротивления пьезокерамики (для  $\eta_c < 0,3$ ).

Выражение (13.2) является общим решением задачи о механическом импедансе экранированного стержневого преобразователя с накладкой. Для анализа ограничимся случаем, когда площади поперечного сечения пьезостержня и накладки равны между собой, а реактивные составляющие входных импедансов  $X_3 = X_H = 0$ . При этом из формулы (13.2) получим

$$R_M = (\rho c)_K R_3 / R_4, \quad (13.3)$$

где

$$R_3 = 2(\operatorname{ch} al - \cos \beta l) \left[ \operatorname{sh} al + \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} \operatorname{ch} al \right] +$$

$$+ \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} \left[ \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} \operatorname{sh} al \operatorname{ch} al - \sin^2 \beta l \right] + \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} (\operatorname{sh}^2 al + \sin^2 \beta l) + 2 \operatorname{sh} al (\operatorname{ch} al - \cos \beta l) \right];$$

$$R_4 = 4 \left[ \operatorname{ch} al - \cos \beta l \right] \left( \operatorname{ch} al - \cos \beta l + \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} \operatorname{sh} al \operatorname{ch} al \right) +$$

$$+ \left[ \frac{R_H + R_3}{(\rho c)_K} \right]^2 (\operatorname{sh}^2 al + \sin^2 \beta l).$$

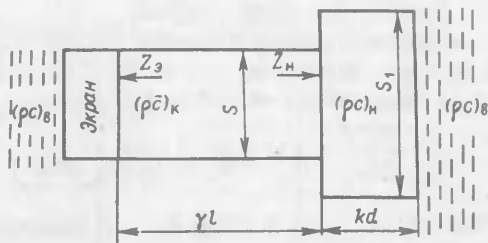


Рис. 4.1. Экранированный стержневой преобразователь с накладкой.

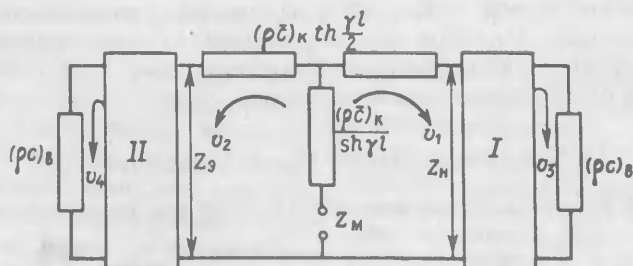


Рис. 4.2. Механическая часть эквивалентной схемы стержневого преобразователя.

Рассмотрим частные случаи.

Экранированный стержень без накладки, работающий на резонансе ( $\beta l = \pi$ ). Учитывая, что в пьезокерамике  $al \ll 1$ , можно принять  $\text{ch } al \approx 1$ ,  $\text{sh}^2 al \ll 1$ . Тогда из формулы (13.2) найдем

$$R_M = \frac{1}{4} [R_H + R_3 + (\rho c)_K \text{sh } al]. \quad (13.4)$$

Заметим, что при  $\alpha = 0$  и  $R_3 = 0$  выражение (13.4) совпадает с результатом Л. Я. Гутина.

Четвертьволновый стержень с четвертьволновой накладкой ( $\beta l = \pi/2$ ;  $kd = \pi/2$ ). Если преобразователь экранирован со стороны пьезостержня, то в соответствии с § 1

$$R_H / (\rho c)_K = (\rho c)_H^2 / (\rho c)_K (\rho c)_B \gg 1.$$

Поэтому выражение (13.3) принимает следующий вид:

$$R_M = [(\rho c)_K / (\rho c)_H]^2 \cdot (\rho c)_B + R_3 + (\rho c)_K \text{sh } al. \quad (13.5)$$

В случае, когда преобразователь экранирован со стороны наклейки, а излучающей является свободная поверхность пьезостержня, выражение (13.3) переходит в следующее:

$$R_M = [(\rho c)_K / (\rho c)_H]^2 \cdot R_3 + (\rho c)_B + (\rho c)_K \text{sh } al. \quad (13.6)$$

В формулах (13.4) – (13.6) величина  $(\rho c)_K \text{sh } al$  служит сопротивлением механических потерь в активном материале  $R_{мп}$  (потери в накладке и на склейках не учитываем). При  $\text{sh } al = al$  получаем

$$R_{мп} = (\rho c)_K al = \beta l (\rho c)_K / 2 Q_K, \quad (13.7)$$

где  $Q_K = 1/\eta_E$  – механическая добротность пьезокерамики.

Определим акустико-механический КПД преобразователя как

$$\eta_{ам} = W_{ак} / W_M = W_{ак} / (W_{ак} + W_3 + W_{мп}), \quad (13.8)$$

где  $W_{ак}$  – полезная акустическая мощность, излучаемая неэкранированной поверхностью преобразователя;  $W_M$  – полная механическая мощность, потребляемая преобразователем с учетом механических потерь в пьезокерамике, а также излучения в рабочее и тыльное полупространства. При таком определении  $\eta_{ам}$  активная составляющая входного импеданса экрана  $R_3$  относится к разряду механических потерь. С учетом эквивалентной схемы, приведенной на рис. 4.2, и выражений (13.4) – (13.8) запишем формулы для определения акустико-механического КПД экранированного стержневого преобразователя:

а) для полуволнового преобразователя

$$\eta_{ам} = [1 + R_3 / (\rho c)_B + 0,5 \pi / Q_K \cdot (\rho c)_K / (\rho c)_B]^{-1}; \quad (13.9)$$

б) для четвертьволнового преобразователя при излучении накладкой

$$\eta_{ам} = \left\{ 1 + \frac{R_3}{(\rho c)_B} \left[ \frac{(\rho c)_H}{(\rho c)_K} \right]^2 + \frac{0,25 \pi}{Q_K} \frac{(\rho c)_K}{(\rho c)_B} \left[ \frac{(\rho c)_H}{(\rho c)_K} \right]^2 \right\}^{-1}; \quad (13.10)$$

Таблица 9. Акустико-механический КПД  $\eta_{ам}$  стержневого преобразователя

| $\frac{R_3}{(\rho c)_в}$ | Полуволновый стержень |      | Четвертьволновая стальная накладка, экран со стороны пьезостержня |      | Четвертьволновая стальная накладка, экран со стороны накладки |      |
|--------------------------|-----------------------|------|---|------|---|------|
|                          | 0                     | 1    | 0   | 1    | 0   | 1    |
| $Q_1 = 60$               | 0,75                  | 0,43 | 0,48  | 0,12 | 0,86  | 0,76 |
| $Q_2 = 350$              | 0,94                  | 0,48 | 0,87  | 0,18 | 0,97  | 0,80 |

в) для четвертьволнового преобразователя в случае излучения в воду пьезостержнем

$$\eta_{ам} = \left\{ 1 + \frac{R_3}{(\rho c)_в} \left[ \frac{(\rho c)_к}{(\rho c)_н} \right]^2 + \frac{0,25 \pi}{Q_к} \frac{(\rho c)_к}{(\rho c)_в} \right\}^{-1} \quad (13.11)$$

В табл. 9 приведены значения  $\eta_{ам}$ , рассчитанные по формулам (13.9) – (13.11) для двух составов пьезокерамики с низкой ( $Q_1 = 60$ ) и высокой ( $Q_2 = 350$ ) добротностью при  $R_3/(\rho c)_в = 0$  (случай идеального экрана) и  $R_3/(\rho c)_в = 1$  (случай отсутствия экрана). В качестве материала накладки выбиралась сталь.

Зависимости  $\eta_{ам}^{отн}$ , отнесенные к величине  $\eta_{ам}^0$  при  $R_3/(\rho c)_в = 0$ , от удельного значения активной составляющей входного импеданса экрана построены на рис. 4.3. Анализ табл. 9 и графиков, приведенных на рис. 4.3, показывает, что с увеличением  $R_3/(\rho c)_в$  акустико-механический КПД стержневого преобразователя уменьшается. Скорость этого уменьшения зависит как от добротности пьезокерамики, так и от типа преобразователя, а для четвертьволнового преобразователя – также от стороны экранирования. Видно, что для пьезокерамики с высокой добротностью изменение относительной величины КПД  $\eta_{ам}^{отн}$  с ростом  $R_3/(\rho c)_в$  получается несколько большим, чем для низкодобротной пьезокерамики. При расположении экрана со стороны накладки акустические свойства экрана слабо влияют на КПД преобразователя, в особенности в случае более

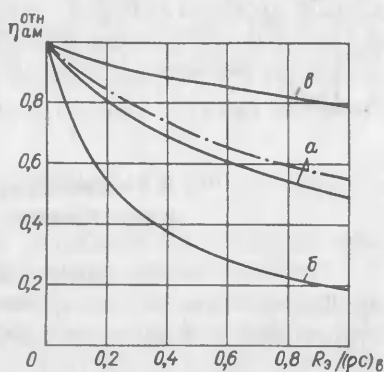


Рис. 4.3. Акустико-механический КПД стержневого преобразователя, отнесенный к КПД преобразователя с идеальным экраном.

а – полуволновый преобразователь; б – четвертьволновый преобразователь с экраном, расположенным со стороны пьезостержня; в – четвертьволновый преобразователь с экраном, расположенным со стороны накладки.

— · —  $Q_1$ ; —  $Q_2$ .



тяжелой накладки. Как будет показано ниже, это объясняется преимущественным излучением звуковой энергии со свободной поверхности пьезостержня. В противоположность этому, зависимость  $\eta_{ам}^{отн}$  от  $R_3/(\rho c)_в$  в случае расположения экрана со стороны пьезостержня получается более резкой. Отмеченные закономерности являются типичными для стержневых преобразователей, хотя для конкретных конструкций численные значения, естественно, будут иными.

На основании формул (13.9) – (13.11), графика (см. рис. 4.3) и табл. 9 можно, задавшись допустимым изменением (уменьшением) КПД, определить требуемые величины  $R_3/(\rho c)_в$ . Например, для полуволнового преобразователя, выполненного из пьезокерамики с добротностью  $Q_1$ , относительный КПД  $\eta_{ам}^{отн} = 0,9$  достигается при  $R_3/(\rho c)_в = 0,15$ , что соответствует уменьшению акустико-механического КПД от 0,75 (в случае идеального экрана) до 0,67. Для высокодобротной керамики то же значение  $\eta_{ам}^{отн}$  обеспечивается экраном с лучшими, чем в первом случае параметрами  $R_3/(\rho c)_в = 0,11$ . При расположении экрана со стороны накладки  $\eta_{ам}^{отн} = 0,9$  достигается при  $R_3/(\rho c)_в = 0,75$  (для преобразователя из керамики с добротностью  $Q_1$ ) или при  $R_3/(\rho c)_в = 0,5$  (для  $Q_2$ ). Это указывает на меньшую зависимость параметров преобразователя, экранированного со стороны накладки, от качества экрана. Таким образом, акустико-механический КПД стержневого преобразователя зависит от удельной величины активной составляющей входного импеданса экранирующего слоя  $R_3/(\rho c)_в$ : чем меньше  $R_3$ , тем выше при прочих равных условиях КПД. Поэтому следует стремиться к выполнению экранов с минимально возможной величиной  $R_3/(\rho c)_в$ .

#### § 14. Звуковое давление на оси и тыльный лепесток характеристики направленности

Отношение давления  $p_T$ , создаваемого стержневым преобразователем на оси характеристики направленности в тыльном полупространстве, к давлению в рабочем полупространстве  $p_0$

$$p_T/p_0 = \sigma_T \quad (14.1)$$

называется тыльным лепестком [115]. Величина  $\sigma_T$  характеризует эффективность экранирования. Если размеры излучающей, а также экранированной поверхности преобразователя велики по сравнению с длиной волны в воде, то давления  $p_T$  и  $p_0$  пропорциональны колебательным скоростям на наружной стороне экрана и на излучающей (рабочей) поверхности преобразователя, и выражение (14.1) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_T = |v_4/v_3|, \quad (14.2)$$

где  $v_4$  и  $v_3$  – колебательные скорости на „выходах” экрана и накладки (см. эквивалентную схему на рис. 4.2). Колебательные скорости

на концах пьезостержня  $\nu_1$  и  $\nu_2$  связаны с  $\nu_3$  и  $\nu_4$  через соответствующие коэффициенты передачи:

$$\Pi_v^I = \nu_3/\nu_1; \quad \Pi_v^{II} = \nu_4/\nu_2. \quad (14.3)$$

Из формул (14.2) и (14.3) получаем

$$\sigma_T = |(\nu_2/\nu_1)(\Pi_v^{II}/\Pi_v^I)|. \quad (14.4)$$

Отношение  $\nu_2/\nu_1$  находим из условия равенства механических напряжений в ветвях эквивалентной схемы с импедансами  $Z_H$  и  $Z_3$  как

$$\nu_2/\nu_1 = \frac{Z_H - i(\rho c)_K \operatorname{tg}(\beta l/2)}{Z_3 - i(\rho c)_K \operatorname{tg}(\beta l/2)}. \quad (14.5)$$

Здесь и в дальнейшем потерями в активном материале пренебрегаем, поскольку их влияние на направленные свойства преобразователя несущественно. Рассмотрим некоторые частные случаи.

**Экранированный преобразователь без накладки с переходными слоями (рис. 4.4).** На полуволновом резонансе преобразователя (при  $\beta l = \pi$ ) из формул (14.4) и (14.5) получаем

$$\nu_2/\nu_1 = 1; \quad \sigma_T = |\Pi_v^{II}/\Pi_v^I|, \quad (14.6)$$

где  $\Pi_v^I$  — коэффициент передачи колебательной скорости через переходные слои;  $\Pi_v^{II}$  — коэффициент передачи через экран.

Выражение (14.6) показывает, что величина тыльного лепестка характеристики направленности тем меньше, чем больше  $\Pi_v^I$  по сравнению с  $\Pi_v^{II}$ . При  $\Pi_v^I = 1$  (или в случае отсутствия переходных слоев)  $\sigma_T = |\Pi_v^{II}|$ , и тыльный лепесток однозначно определяется коэффициентом передачи колебательной скорости через экран. Если  $\Pi_v^{II} = 1$  (экран отсутствует), а  $\Pi_v^I > 1$ , в соответствии с формулой (14.6) получаем

$$\sigma_T = |1/\Pi_v^I| < 1,$$

и излучение также будет направлено в основном в рабочее полупространство.

Значения коэффициентов передачи колебательной скорости через плоские слои могут быть рассчитаны по формулам, приведенным в § 3.

Определим теперь выигрыш в давлении на оси характеристики направленности, получаемый при экранировании преобразователя. Если экран отсутствует ( $Z_H = Z_3 = (\rho c)_B$ ), излучаемая преобразователем мощность

$$W_0 = 2\nu_0^2(\rho c)_B. \quad (14.7)$$

Для экранированного преобразователя (без учета механических потерь)

$$W_3 = V_3^2[(\rho c)_B + R_3]. \quad (14.8)$$

Приравняв значения (14.7) и (14.8), находим

$$\kappa = \left| \frac{\nu_3}{\nu_0} \right|^2 = \frac{2}{1 + \frac{R_3}{(\rho c)_B}}. \quad (14.9)$$

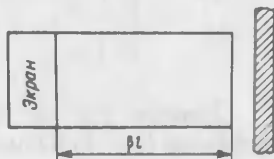


Рис. 4.4. Экранированный преобразователь с переходными слоями.

Запишем выражение (14.9) в случае экранирующего слоя без потерь с учетом формулы (3.17):

$$\kappa = 2/[1 + |\Pi_v^H|^2]. \quad (14.10)$$

Выражение (14.10) показывает, что преобразователь с экраном, обладающим коэффициентом передачи  $\Pi_v^H = 0$ , развивает давление на оси характеристики направленности в  $\sqrt{2}$  раз большее, по сравнению с незранированным преобразователем — при одинаковой механической мощности, подводимой к преобразователю. Если задаться одинаковыми механическими напряжениями, то выигрыш в давлении на оси экранированного преобразователя будет определяться величиной  $\kappa$ . На основании теоремы взаимности из формулы (14.10) можно видеть, что чувствительность незранированного полуволнового преобразователя, принимающего звук одной стороной, в два раза меньше чувствительности приемника с идеальным ( $\Pi_v^H = Z_3 = 0$ ) экраном.

Таким образом, эффективность экранирования полуволнового преобразователя без накладки при прочих равных условиях зависит от коэффициента передачи колебательной скорости через экран.

Преобразователь с накладкой, экранированный со стороны пьезостержня. Для анализа этого случая запишем входной импеданс и коэффициент передачи накладки на основании формул, полученных в § 1 и 3 в следующем виде:

$$\frac{Z_H^I}{(\rho c)_B} = m^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2 kd}{m^2 + \operatorname{tg}^2 kd} + i \frac{m(1 - m^2) \operatorname{tg} kd}{m^2 + \operatorname{tg}^2 kd}; \quad (14.11)$$

$$\Pi_v^I = \left[ \frac{\operatorname{Re}(Z_H)}{(\rho c)_B} \right]^{1/2} = m \left[ \frac{1 + \operatorname{tg}^2 kd}{m^2 + \operatorname{tg}^2 kd} \right]^{1/2}, \quad (14.12)$$

где  $m = (\rho c)_H / (\rho c)_B$  — относительное волновое сопротивление материала накладки.

В случае четвертьволнового пьезокерамического стержня с четвертьволновой металлической накладкой ( $kd = \beta l = \pi/2$ ) из формул (14.11) и (14.12) получаем

$$Z_H^I / (\rho c)_B = m^2; \quad \Pi_v^I = m.$$

Поэтому в соответствии с выражениями (14.4) и (14.5)

$$\sigma_T = \left| \frac{m^2 - i \frac{(\rho c)_K}{(\rho c)_B}}{\frac{R_3}{(\rho c)_B} - i \frac{(\rho c)_K}{(\rho c)_B}} \right| \frac{|\Pi_v^H|}{m}. \quad (14.13)$$

Замечая, что  $m^2 \gg (\rho c)_K / (\rho c)_B$ , а  $(\rho c)_K / (\rho c)_B \gg R_3 / (\rho c)_B$ , из формулы (14.13) находим

$$\sigma_T = |\Pi_v^H| \frac{(\rho c)_H}{(\rho c)_K}. \quad (14.14)$$

Выражение (14.14) показывает, что при определенных условиях, например, при  $(\rho c)_н > (\rho c)_к$  и  $\Pi_v^{II} \geq (\rho c)_к / (\rho c)_н$ , величина  $\sigma_T$  может принять значение, большее единицы; это указывает на преимущественное излучение в полупространство, расположенное со стороны экрана. Например, для накладки из стали отношение  $(\rho c)_н / (\rho c)_к \approx 2$ , и при  $\Pi_v^{II} > 0,5$  значение  $\sigma_T$  становится больше единицы, а излучение в рабочее полупространство уменьшается. Этот факт служит объяснением существенного падения акустико-механического КПД  $\eta_{ам}$ , которое было отмечено в § 13.

На низких частотах при  $kd \ll 1$  из формул (14.11) и (14.12) получаем

$$Z_H^I / (\rho c)_в = 1 - imkd; \quad \Pi_v^I = 1,$$

тогда

$$\sigma_T = |\Pi_v^{II}| (1 + 2\rho_n d / \rho_k l). \quad (14.15)$$

Видно, что в области низких частот величина тыльного лепестка зависит от соотношения масс накладки и пьезостержня. Если задаться допустимой величиной  $\sigma_T = 0,4$ , то при  $\rho_n d / \rho_k l \leq 0,2$  требуется экран с коэффициентом передачи  $\Pi_v^{II} \leq 0,3$ , а при  $\rho_n d / \rho_k l \leq 0,6$  — с  $\Pi_v^{II} \leq 0,1$ .

Таким образом, с увеличением отношения массы накладки к массе пьезостержня требования к качеству экрана становятся более жесткими. Это объясняется также и тем, что колебательная скорость наружной поверхности массивной накладки всегда существенно меньше, чем скорость свободной поверхности пьезостержня. Поэтому у стержневых преобразователей обычно тыльную накладку выполняют массивной, а излучающую — легкой [96], что позволяет использовать экран с большим коэффициентом передачи при достижении той же величины  $\sigma_T$ .

Преобразователь, экранированный со стороны накладки. В этом случае величина  $\sigma_T$  определяется формулой

$$\sigma_T = |v_3 / v_4| = \left| \frac{Z^{II} - i(\rho c)_к \operatorname{tg}(\beta l / 2)}{Z^I - i(\rho c)_к \operatorname{tg}(\beta l / 2)} \right|, \quad (14.16)$$

где следует принять  $Z^I = (\rho c)_в$  (это означает, что  $\Pi_v^I = 1$ );

$$Z^{II} = (\rho c)_н^2 / R_3; \quad \Pi_v^{II} = (\rho c)_н \cdot \Pi_{v_3} / (\rho c)_в.$$

(Здесь  $\Pi_{v_3}$  — коэффициент передачи через экран в случае отсутствия в нем механических потерь.) Тогда при  $\beta l = kd = \pi/2$  из формул (14.11), (14.12) и (14.16) получим

$$\sigma_T = (\rho c)_к \cdot \Pi_{v_3} / (\rho c)_н, \quad (14.17)$$

а на низких частотах, когда  $\beta l \ll 1$  и  $kd \ll 1$ ,

$$\sigma_T = \Pi_{v_3} \left( 1 + 2 \frac{\rho_n d}{\rho_k l} \right). \quad (14.18)$$

Если снова рассмотреть преобразователь с отношением  $(\rho c)_н / (\rho c)_к \approx 2$ , то при  $\Pi_{v_3} = 0,5$  из формулы (14.17) найдем, что

$\sigma_T = 0,25$  в отличие от  $\sigma_T = 1$ , полученного в случае преобразователя с накладкой, экранированного со стороны пьезостержня. Формула (14.18) также дает существенно меньшую величину  $\sigma_T$ , чем аналогичное выражение (14.15).

Пульсирующие цилиндрические излучатели, часть поверхности которых закрыта слоем экранирующего материала, используют для создания направленного излучения или приема звука [23, 45, 47, 53]. Экран должен обладать малым входным импедансом и высокой звукоизоляцией [52, 93]. Этот внешний экран может представлять собой незамкнутый кольцевой (рис. 5.1, а) или плоский (рис. 5.1, б) слой.

Для предотвращения потерь энергии внутреннюю поверхность цилиндрического преобразователя также обычно экранируют (рис. 5.1, в) [55, 58, 93].

### § 15. Внешний цилиндрический экран

Акустические характеристики цилиндрических преобразователей с внешними цилиндрическими экранами изучены в работах [25, 26, 47, 65, 69, 81, 102]. В статье М. И. Карновского и В. Г. Лозовика [65] решена задача об излучении бесконечного кругового цилиндра при смешанных граничных условиях на его поверхности, на одной из частей которой звуковое давление принимается равным нулю, что соответствует случаю бесконечно тонкого и непрозрачного абсолютно податливого

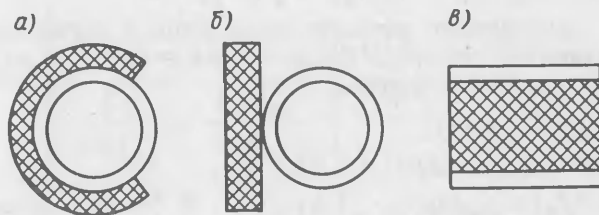


Рис. 5.1. Основные схемы экранирования цилиндрических преобразователей: а – цилиндрический внешний экран; б – плоский внешний экран; в – внутренний экран.

экрана. В работе [91] с использованием метода, разработанного в статье [65], изучено влияние углового размера абсолютно мягкого экрана на основные характеристики пьезо-керамического цилиндрического преобразователя. Поведение цилиндра, экранированного слоем конечной толщины, проанализировано в работах В. Т. Гринченко, И. В. Вовка и др. [26, 45, 47, 53, 54], в которых задача об излучении решена методом частичных областей. Влияние экрана с отличной от нуля звукопрозрачностью на параметры цилиндрического излучателя исследовано в статье [23].

Во всех перечисленных работах решение найдено в весьма сложной форме, и получение численных результатов сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Отметим также, что с увеличением толщины слоя при экранировании по схеме, приведенной на рис. 5.1, *a*, возникают дополнительные эффекты, связанные с наличием рупора, образованного торцами экрана [23, 26, 53]. Поэтому свойства преобразователя в данном случае управляются не только собственно акустическими параметрами экрана, но и его геометрией.

В работе [25] показано, что при малой, но конечной толщине экрана характеристики преобразователя практически не зависят от толщины слоя. Поэтому удобным методом расчетной оценки влияния внешнего экрана на поле и сопротивление излучения цилиндрического преобразователя с учетом прохождения звука сквозь экран и для произвольного угла экранирования может служить решение задачи о дифракции волны, излученной бесконечно длинным цилиндром, на окружающей этот цилиндр решетке из абсолютно податливых цилиндрических рассеивателей (рис. 5.2), полученное в работах [30, 31]. При этом свойства экрана: его входной импеданс и звукопрозрачность — регулируются количеством рассеивателей в выбранном секторе экранирования  $2(\pi - \theta)$ . По аналогии с работой [138], зададим давление, создаваемое излучающим цилиндром в точке *M*, в виде следующего ряда:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n H_n^{(1)}(kR) e^{ina}, \quad (15.1)$$

где  $B_n$  — неизвестные коэффициенты разложения. Смысл величин  $a$  и  $R$  ясен из рис. 5.2. Рассмотрим далее цилиндр с номером *t*. Давление

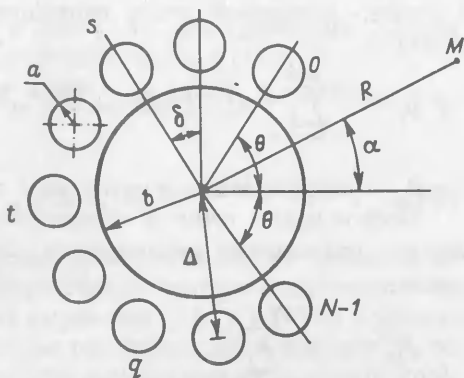


Рис. 5.2. Цилиндрический излучатель с экраном из абсолютно податливых цилиндрических рассеивателей.

в волне, рассеянной этим цилиндром в точке  $M$ , записывается в виде

$$p_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(t)} H_n(kR_t) e^{ina_t}, \quad (15.2)$$

где  $R_t$  — расстояние от оси цилиндра  $t$  до точки  $M$ .

Полное поле в точке  $M$  складывается из парциальных полей, создаваемых излучающим цилиндром и  $N$  цилиндрами в экранирующей решетке:

$$p_M = p + \sum_{t=0}^{N-1} p_t. \quad (15.3)$$

Давление на цилиндре с радиусом  $b$  обусловлено собственным давлением, излучаемым этим цилиндром, и давлениями, „наведенными” всеми податливыми рассеивателями. Поэтому первое граничное условие имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ p + \sum_{t=0}^{N-1} p_t \right]_{R=b} = ik\nu (\rho c)_b, \quad (15.4)$$

где  $\nu$  — колебательная скорость цилиндра, совершающего пульсирующие колебания (в дальнейшем принимаем  $\nu = 1$ ).

Цилиндр  $t$  облучается волной, излученной цилиндром с радиусом  $b$ , и волнами, рассеянными всеми остальными абсолютно податливыми цилиндрами, расположенными справа и слева от цилиндра с номером  $t$ . Поскольку по постановке задачи давление на акустически мягком цилиндре должно обращаться в нуль, второе граничное условие записывается в следующем виде:

$$\left[ p + p_t + \sum_{s=0}^{t-1} p_s + \sum_{q=t+1}^{N-1} p_q \right]_{R_t=a} = 0. \quad (15.5)$$

причем значения  $p_s$  и  $p_q$  имеют вид, аналогичный выражению (15.2). Решение задачи состоит в отыскании неизвестных коэффициентов  $B_n$ ,  $A_n^{(t)}$ . Для того чтобы удовлетворить граничному условию (15.4), необходимо записать выражение (15.2) в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью большого цилиндра; чтобы удовлетворить граничному условию (15.5), нужно написать выражения для  $p$ ,  $p_s$  и  $p_q$  в цилиндрической системе координат с осями, совпадающими с осью цилиндра  $t$ . Переход от одной системы координат к другой осуществляется при помощи теоремы сложения для цилиндрических

функций [см. формулу (12.14) и рис. 3.18]. Для граничного условия (15.4) наблюдается следующее соответствие с рис. 3.18:

$$kb(s-p) = k\Delta; \quad kR_s = kR; \quad kR_p = kR_t; \quad \varphi = \delta t + \theta - \alpha; \quad \psi = -\pi + \alpha_t.$$

Тогда для давления  $p_t$  получаем

$$p_t = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(t)} H_{n-m}(k\Delta) J_n(kR) e^{-in(\delta t + \theta)} e^{ina}, \quad (15.6)$$

где  $\Delta$  — расстояние между центрами большого и любого из малых цилиндров;  $2\theta$  — величина незранированного сектора излучающего цилиндра (см. рис. 5.2). Подставляя выражения (15.1) и (15.6) в условие (15.4) и приравнивая коэффициенты при членах, содержащих  $e^{ina}$ , получаем первую группу уравнений для определения неизвестных коэффициентов

$$\begin{aligned} B_n H_n'(kb) + J_n'(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{n-m}(k\Delta) \sum_{t=0}^{N-1} A_m^{(t)} e^{-in(\delta t + \theta)} = \\ = \begin{cases} i(\rho c)_b & (n=0); \\ 0 & (n \neq 0), \quad n = -\infty \dots +\infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.7)$$

(Здесь штрих обозначает дифференцирование функции по  $kR$ ).

Для второго граничного условия (15.5) давления  $p$  и  $p_s$  принимают следующий вид:

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m H_{m-n}(k\Delta) J_n(kR_t) e^{im(\delta t + \theta)} e^{ina_t}; \quad (15.8)$$

$$p_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(s)} \times$$

$$\times H_{m-n}(kd_{st}) J_n(kR_t) \times \\ \times e^{i(m\alpha_{st} - n\alpha_{ts})} e^{ina_t}, \quad (15.9)$$

где  $d_{st}$  — расстояние между осями цилиндров  $s$  и  $t$ . Смысл угла  $\alpha_{st}$  ясен из рис. 5.3. Выражение для  $p_q$  получается из формулы (15.9) заменой индекса  $s$  на  $q$ .

Подставляя выражения (15.2), (15.8), (15.9) и значение  $p_q$  в формулу (15.5) и приравнивая коэффициенты при членах, содержащих  $e^{ina_t}$ , после несложных преобразований получаем вторую группу уравнений для определения неизвестных коэффициентов:

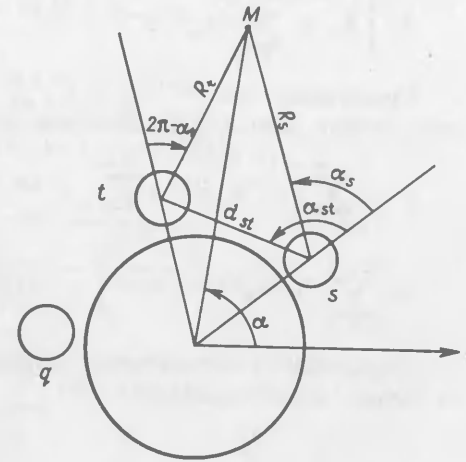


Рис. 5.3. Взаимное расположение излучающего и абсолютно податливых цилиндров с номерами  $s$ ,  $t$  и  $q$ .

$$A_n^{(t)} + C_n(ka) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [B_m H_{m-n}(k\Delta) e^{i(\delta t + \theta)m} + D_{mn}] = 0, \quad (15.10)$$

где

$$C_n(ka) = J_n(ka) / N_n(ka);$$

$$D_{mn} = \sum_{s=0}^{t-1} A_m^{(s)} H_{m-n}(kd_{st}) e^{i \left[ \frac{\delta(t-s)}{2} (m+n) + \frac{\pi}{2} (n-m) \right]} + \sum_{q=t+1}^{N-1} A_m^{(q)} H_{m-n}(kd_{qt}) e^{-i \left[ \frac{\delta(q-t)}{2} (m+n) + \frac{\pi}{2} (n-m) \right]}$$

Зная неизвестные коэффициенты, определяемые бесконечной системой уравнений (15.7) и (15.10), можно найти поле в точке  $M$ , подставив в формулу (15.3) значения (15.1) и (15.2). Вычислим теперь поле вдали от цилиндра, приняв  $R \gg b$  и  $kR \gg 1$ . Замечая, что при этом  $R_t = R - \Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha)$ ;  $\alpha_t = \alpha - \delta t$ , и учитывая асимптотическое представление функции Ханкеля при больших значениях аргумента [43], находим

$$p = (2/\pi kR)^{1/2} \cdot e^{i(kR - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(\alpha - \pi/2)} \times \left[ B_n + \sum_{t=0}^{N-1} A_n^{(t)} e^{-ik\Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha)} e^{in(\theta + \delta t)} \right]. \quad (15.11)$$

Представляя член  $e^{-ik\Delta \cos(\theta + \delta t - \alpha)}$  в виде разложения по плоским волнам типа (12.2), запишем выражение для определения  $p^*$ :

$$p \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ i^{-n} B_n e^{ina} + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-(m+n)} J_m(k\Delta) e^{-i(m-n)(\theta - \alpha)} \times \sum_{t=0}^{N-1} A_n^{(t)} e^{i(m-n)\delta t} \right]. \quad (15.12)$$

Определим сопротивление излучения пульсирующего цилиндра на единицу его площади как:

$$Z = \frac{1}{2\pi v} \int_0^{2\pi} p_b d\alpha, \quad (15.13)$$

\* Здесь и в дальнейшем член  $(2/\pi kR)^{1/2} e^{i(kR - \frac{\pi}{4})}$  будем опускать.

где  $p_b$  — давление на поверхности цилиндра, вычисляемое по формуле (15.3) при  $R = b$ . Подставляя в формулу (15.13) это значение  $p_b$  и интегрируя, получаем следующее выражение:

$$Z = B_0 H_0(kb) + J_0(kb) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \dot{H}_m(k\Delta) (-1)^m \times \sum_{t=0}^{N-1} A_m^{(t)} e^{im(\delta t + \theta)}. \quad (15.14)$$

Значительно более простой результат, не связанный с необходимостью решать бесконечную систему уравнений, получается в случае, когда волновой радиус  $ka \ll 1$ . При этом можно принять, что все податливые цилиндры рассеивают волны одинаковой амплитуды  $A_n^{(t)} = A_0$  [180]. Произвольные постоянные  $A_0$  и  $B_n$  найдутся из уравнений (15.7) и (15.10), причем уравнение (15.10) следует предварительно просуммировать в пределах от 0 до  $N-1$ . В результате выражения для расчета сопротивления излучения  $Z$  (15.14) и давления в дальнем поле  $p$  (15.12) преобразуются к виду

$$Z = R + iX = Z_s \frac{D - NJ_0(ka) H_0^2(k\Delta) \frac{J_0(kb)}{H_0(kb)}}{D - NJ_0(ka) H_0^2(k\Delta) \frac{J_1(kb)}{H_1(kb)}}. \quad (15.15)$$

$$P \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^{-n} e^{ina} \left[ B_n + A_0 J_n(k\Delta) e^{-in\theta} \sum_{t=0}^{N-1} e^{-in\delta t} \right], \quad (15.16)$$

где

$$A_0 = i(\rho c)_b \frac{J_0(ka) H_0(k\Delta)}{H_1(kb) D - NJ_0(ka) J_1(kb) H_0^2(k\Delta)};$$

$$B_0 = -A_0 \frac{J_n'(kb) H_n(k\Delta) e^{-in\theta} \frac{e^{-in\delta N} - 1}{e^{-in\delta} - 1}}{H_n'(kb)};$$

$$D = H_0(ka) + \frac{2}{N} J_0(ka) \sum_{t=1}^{N-1} (N-t) H_0(kd_t);$$

$$Z_s = -i(\rho c)_n \cdot H_0(kb) / H_1(kb)$$

— сопротивление излучения цилиндра в отсутствие рассеивателей;  $d_t = 2\Delta \sin \delta t / 2$  — расстояние между центром цилиндра  $t$  и центром каждого из  $N-1$  податливых цилиндров.



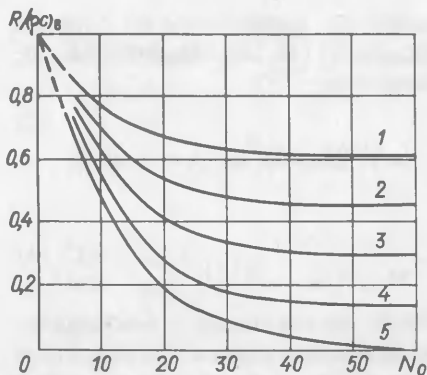


Рис. 5.4. Зависимость удельной величины активной составляющей сопротивления излучения цилиндра от количества податливых рассеивателей.

1 -  $\theta = 120^\circ$ ; 2 -  $\theta = 90^\circ$ ; 3 -  $\theta = 60^\circ$ ; 4 -  $\theta = 30^\circ$ ; 5 -  $\theta = 0^\circ$ .

с ростом  $N_0$  величина  $R/(\rho c)_в$  уменьшается и при  $N_0 = 60$  становится практически равной нулю. Если  $\theta > 0$ , наблюдается область „стабилизации” сопротивления излучения  $R$ , которая наступает, начиная с определенных значений  $N_0$ , зависящих от угла экранирования. С его уменьшением величина  $R/(\rho c)_в$  „стабилизируется” при меньших  $N_0$ , так как влияние открытой части цилиндра на его полное сопротивление излучения становится все более определяющим. В области „стабилизации” значение  $R/(\rho c)_в$  уже не зависит от  $N_0$ , это как бы соответствует случаю цилиндра в мягком экране [65].

Результаты расчета характеристик направленности показывают (рис. 5.5), что поле пульсирующего цилиндра существенно зависит

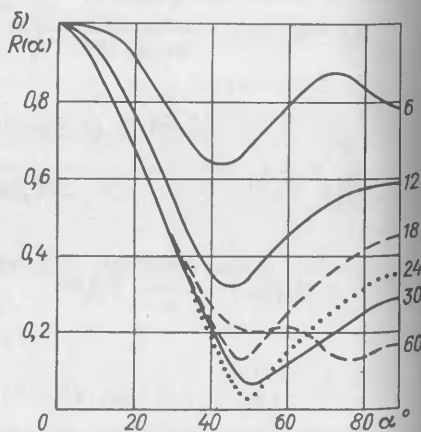
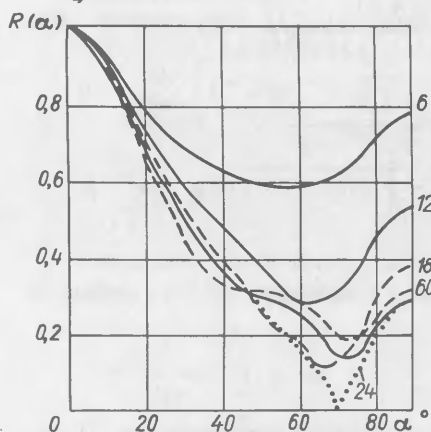


Рис. 5.5. Характеристики направленности цилиндра, экранированного решеткой из абсолютно податливых цилиндров, с различным  $N_0$ : а -  $\theta = 90^\circ$ ; б -  $\theta = 60^\circ$

При численном расчете принималось, что  $N = N_0(\pi - \theta)/\pi + 1$  (при  $\theta \neq 0$ );  $N = N_0$  (при  $\theta = 0$ ), где  $N_0$  - количество цилиндрических рассеивателей в случае их равномерного расположения вокруг излучателя.

В качестве примера на рис. 5.4 приведен график отношения активной составляющей сопротивления излучения экранированного цилиндра к волновому сопротивлению воды  $R/(\rho c)_в$ , построенный на основании выражения (15.15) в зависимости от числа податливых цилиндров  $N_0$  для различных углов экранирования  $2(\pi - \theta)$  при  $kb = 3,0$  и  $ka = 0,005$ . Видно, что при полном экранировании цилиндра ( $\theta = 0$ )

от свойств экрана и угла экранирования: чем более частая решетка окружает цилиндр, тем лучше ее экранирующие свойства, которые сказываются на уменьшении величины

тыльного лепестка характеристики направленности. На рис. 5.5 различным  $N_0$  соответствуют следующие значения  $R/(\rho c)_в = R_3/(\rho c)_в$ , определенные по формуле (15.15) для  $\theta = 0$  (табл. 10).

Относительное давление  $p(0)/p_s$  (где  $p_s$  — давление, развиваемое незранированным цилиндром при той же колебательной скорости на его поверхности), для полностью экранированного излучателя ( $\theta = 0$ ) в точности совпадает с величиной  $[R_3/(\rho c)_в]^2$ , также рассчитанной для  $\theta = 0$ , которая в данном случае служит как бы коэффициентом передачи колебательной скорости  $\Pi_y$ . Однако в случае неполностью экранированного цилиндра величина тыльного лепестка вследствие дифракции не совпадает с  $\Pi_y$ .

В качестве критерия, по которому можно судить об эффективности экранирования цилиндрического преобразователя, примем величину давления на оси его характеристики направленности. Если рассчитать известным образом [115] коэффициент концентрации цилиндра, то при одинаковой излучаемой мощности можно получить

$$T = p(0)/p_0(0) = (\Omega/\Omega_0)^{1/2}, \quad (15.17)$$

где  $p_0(0)$  и  $\Omega_0$  — давление на оси характеристики направленности и коэффициент концентрации цилиндра с идеальным ( $R_3/(\rho c)_в = 0$ )

Т а б л и ц а 10. Зависимость  $R_3/(\rho c)_в$  при  $\theta = 0$  от  $N_0$

| $N_0$            | 6    | 12   | 18   | 24   | 30   |
|------------------|------|------|------|------|------|
| $R_3/(\rho c)_в$ | 0,67 | 0,31 | 0,13 | 0,06 | 0,03 |

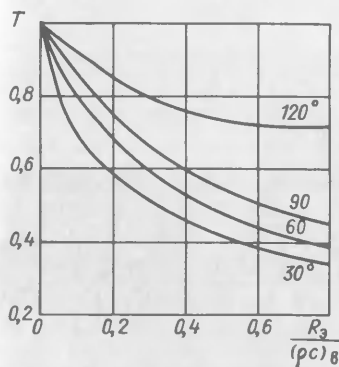


Рис. 5.6. Зависимость от величины  $R_3/(\rho c)_в$  давления на оси характеристики направленности, отнесенного к давлению, развиваемому цилиндром с идеальным ( $R_3/(\rho c)_в = 0$ ) экраном для различных углов  $\theta$ .

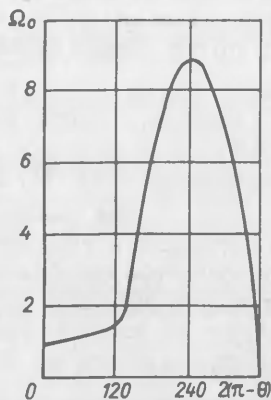


Рис. 5.7. Зависимость коэффициента концентрации цилиндрического излучателя от угла экранирования, рассчитанная для случая идеального экрана ( $N_0 = 60$ ).

экраном. Рассчитанная по формуле (15.17) при  $kb = 2,5$  зависимость  $T$  от  $R_3/(\rho c)_в$  показывает (рис. 5.6), что, чем больше угол экранирования, тем в большей степени отношение  $T$  зависит от качества экрана. Если задаться допустимым уменьшением  $T = 0,8$ , то при  $\theta = 120^\circ$  оно обеспечивается экраном, который обладает импедансом  $R_3/(\rho c)_в$ , лежащем в интервале  $0 < R_3/(\rho c)_в < 0,3$ ; при  $\theta = 60^\circ - 0 < R_3/(\rho c)_в < 0,1$ .

Для сравнения между собой параметров преобразователей, экранированных звукоотражателями с произвольными свойствами, удобным параметром при одинаковом подводимом напряжении является осевая чувствительность, т. е. отношение давления  $p(0)$ , развиваемого на оси характеристики направленности, к корню квадратному из потребляемой электрической мощности  $W_{эл}$  [129]. Величина  $p^2(0)/W_{эл}$ , пропорциональная, как нетрудно показать, коэффициенту концентрации преобразователя, умноженному на его акустико-электрический КПД, позволяет оценить интегральную эффективность преобразователя в направлении главного максимума характеристики направленности. Чем выше  $p(0)/\sqrt{W_{эл}}$ , тем эффективнее при прочих равных условиях экранирование. Например, в случае идеального экрана максимум коэффициента концентрации (рис. 5.7) реализуется при углах экранирования  $240^\circ$  ( $\theta = 60^\circ$ ).

Таким образом, предложенный метод расчета, наряду с определением ряда параметров цилиндрического преобразователя с неидеальным (полупрозрачным) экраном, таких, как характеристика направленности, сопротивление излучения и т. п., позволяет изучить влияние акустических свойств экрана на указанные параметры и оценить их изменение в зависимости от качества экрана. Сравнение полученных результатов с графическими материалами, приведенными в работах [23, 25], показывает, что они хорошо совпадают.

## § 16. Внешний плоский экран

При расположении цилиндрических преобразователей вблизи плоского акустического экрана необходимо установить зависимость параметров преобразователя от расстояния между ним и экраном и от входного импеданса экрана. Не затрагивая вопросов формирования характеристик направленности антенн из таких преобразователей, сосредоточим внимание на поведении одиночного цилиндра [37, 49, 61, 107, 141].

Цилиндр с большим волновым радиусом (режим излучения). Решение задачи об излучении цилиндра радиуса  $a$ , центр которого находится на расстоянии  $b$  от плоского бесконечно протяженного экрана с входным импедансом  $Z_{вх}$  (рис. 5.8), проводим методом, изложенным в работе [37]. Найдем поле в точке  $M$  и сопротивление излучения цилиндра, ограничившись случаем абсолютно жесткого и абсолютно податливого экранов. При этом отраженное поле эквивалентно излучению

мнимого цилиндра, расположенного на расстоянии  $-b$  от плоскости экрана. Давление, создаваемое цилиндром, представим в виде, аналогичном выражению (15.1):

$$p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n(kR) \times e^{ina}. \quad (16.1)$$

При этом отраженное давление определяется как

$$p_r = r_{1,2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \times H_n(kR_1) e^{ina}, \quad (16.2)$$

где  $r_{1,2}$  — коэффициент отражения, причем  $r_1 = +1$  (абсолютно жесткий экран) и  $r_2 = -1$  (абсолютно податливый экран).

Давление в любой точке пространства, в том числе на поверхности излучающего цилиндра, колеблющегося со скоростью  $v$ , складывается из собственного давления и давления за счет отражения от экрана. Поэтому граничное условие принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial R} [p + p_r]_{R=a} = ikv (\rho c)_B. \quad (16.3)$$

Для того чтобы удовлетворить условию (16.3), необходимо записать отраженную волну (16.2) в цилиндрической системе координат с осью, совпадающей с осью излучающего цилиндра. Воспользовавшись теоремой сложения для цилиндрических функций (12.14) в обозначениях, приведенных на рис. 5.8, для  $p_r$  получим

$$p_r = r_{1,2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_m H_{n-m}(2kb) J_n(kR_1) e^{ina}. \quad (16.4)$$

Подставив значение  $p$  (16.1) и  $p_r$  (16.4) в граничное условие (16.3) и приравняв коэффициенты при  $e^{ina}$ , получим следующую бесконечную систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $A_n$ :

$$A_n H'_n(ka) + r_{1,2} J'_n(ka) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_{m-n}(2kb) = \begin{cases} ikv (\rho c)_B & (n = 0); \\ 0 & (n \neq 0). \end{cases} \quad (16.5)$$

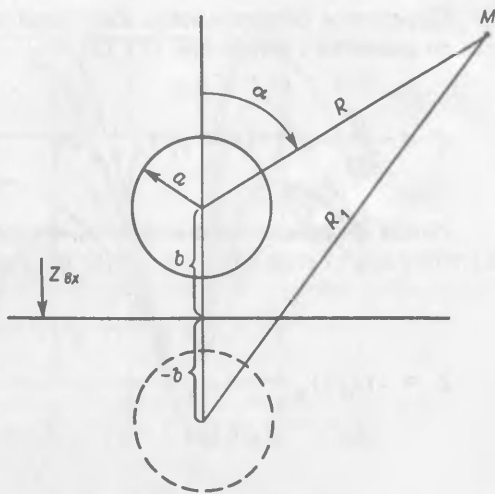


Рис. 5.8. Взаимное расположение излучающего цилиндра и плоского экрана.

Определим сопротивление излучения цилиндра на единицу поверхности по аналогии с формулой (15.13) как

$$Z = \frac{1}{2\pi\nu} \int_0^h (p + p_r)_{R=a} da. \quad (16.6)$$

Найдя колебательную скорость  $\nu$  из системы (16.5) при  $n=0$ , с учетом выражений (16.1) и (16.4) получим

$$Z = -i(\rho c)_B \frac{A_0 H_0(ka) + r_{1,2} J_0(ka) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n(2kb)}{A_0 H_1(ka) + r_{1,2} J_1(ka) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_n(2kb)}. \quad (16.7)$$

В дальнем поле — при  $\alpha = \alpha_1$  и  $R_1 = R + 2b \cos \alpha$  — получим следующее выражение для давления  $p_M$ :

$$p_M = p + p_r \sim \left(1 + r_{1,2} e^{i2kb \cos \alpha}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in(\alpha \pm \pi/2)}. \quad (16.8)$$

Рассчитанная по формуле (16.8) зависимость от  $kb$  давления  $p_M(0)$  (при  $\alpha = 0$ ), отнесенного к давлению, развиваемому в дальнем поле цилиндром без экрана, колеблющегося с той же скоростью  $\nu$  (обозначим это отношение буквой  $\Gamma$ ), носит осциллирующий характер (рис. 5.9). Положение нулей функции  $\Gamma$  при произвольном  $ka$  (расчеты проводились для  $ka \leq 6$  и  $kb \leq 10$ ) соответствует случаю стоячих плоских волн перед абсолютно отражающей плоскостью, что следует также из формулы (16.8), где модуль члена  $1 + r_{1,2} e^{i2kb \cos \alpha}$  при  $\alpha = 0$  совпадает с выражением для плоской стоячей волны [112]. Для абсолютно жесткого экрана ( $r_1 = +1$ ) нули наблюдаются при  $kb = (2n+1)(\pi/2)$ , для абсолютно податливого экрана ( $r_2 = -1$ ) — при  $kb = n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Изменение отношения давлений  $\Gamma$  с  $kb$  при малом волновом радиусе  $ka < 1$  полностью совпадает с картиной плоских стоячих волн. При увеличении  $ka$  значения  $\Gamma$  в максимумах пропорционально растут, а характер и положение этих максимумов, по сравнению со случаем плоских волн, меняется.

Импеданс-годограф сопротивления излучения цилиндра (рис. 5.10), построенный на основании расчета по формуле (16.7), имеет вид спирали, стремящейся при  $kb \rightarrow \infty$  к значению, равному сопротивлению излучения цилиндра без экрана. Витки спирали обладают по  $kb$  периодичностью  $\pi$ , а экстремумы  $\text{Re}(Z)$  для случая  $r_1 = +1$  сдвинуты на угол  $kb \approx \pi/2$  относительно  $r_2 = -1$ , так же как и экстремумы  $\text{Im}(Z)$  (при фиксированных  $ka$ ). Зная значения  $Z$  и  $p$ , можно найти осевую чувствительность излучателя  $p/\sqrt{W_{\text{ак}}}$ , где акустическую мощность  $W_{\text{ак}}$  определим как величину, пропорциональную  $\text{Re}[Z/(\rho c)_B]$ .

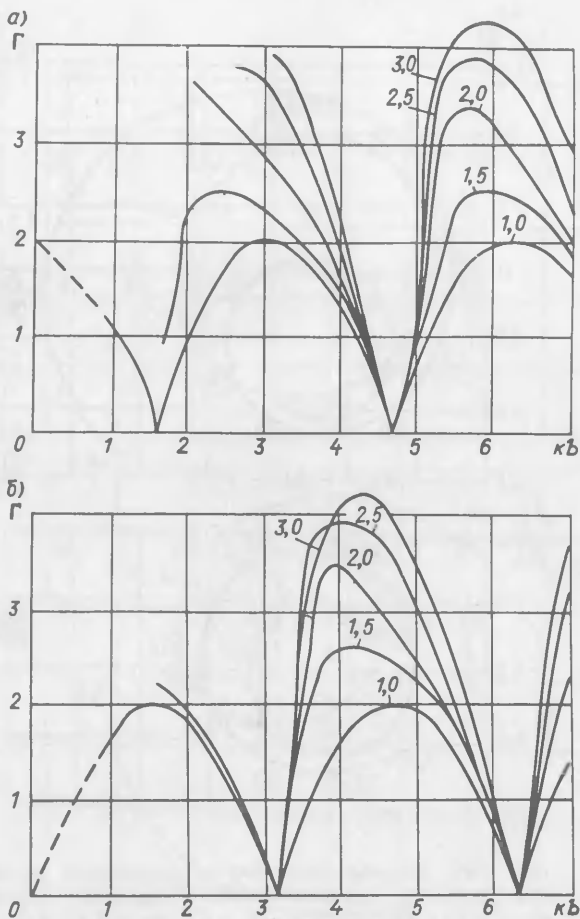


Рис. 5.9. Зависимость отношения давления на оси характеристики направленности цилиндра, расположенного на волновом расстоянии  $kb$  от плоского экрана, к давлению, излученному цилиндром без экрана:  $a$  — абсолютно жесткий экран ( $r_1 = +1$ );  $b$  — абсолютно податливый экран ( $r_2 = -1$ ).

На кривых указаны значения волновых радиусов цилиндра  $ka$ .

При этом полагаем, что внутреннее сопротивление излучателя не зависит от  $kb$ . На рис. 5.11 построена зависимость  $p/\sqrt{W_{ак}}$  от  $kb$  для  $ka = 2,5$ . Видно, что максимумы осевой чувствительности обладают большей остротой, чем максимумы давления. Однако с увеличением  $kb$  разница исчезает, так как  $\text{Re}[Z/(\rho c)_в] \rightarrow 1$ .

Таким образом, для получения максимальной эффективности цилиндрического излучателя следует выбирать оптимальное расстояние от его центра до экрана. При этом величина осевой чувствительности

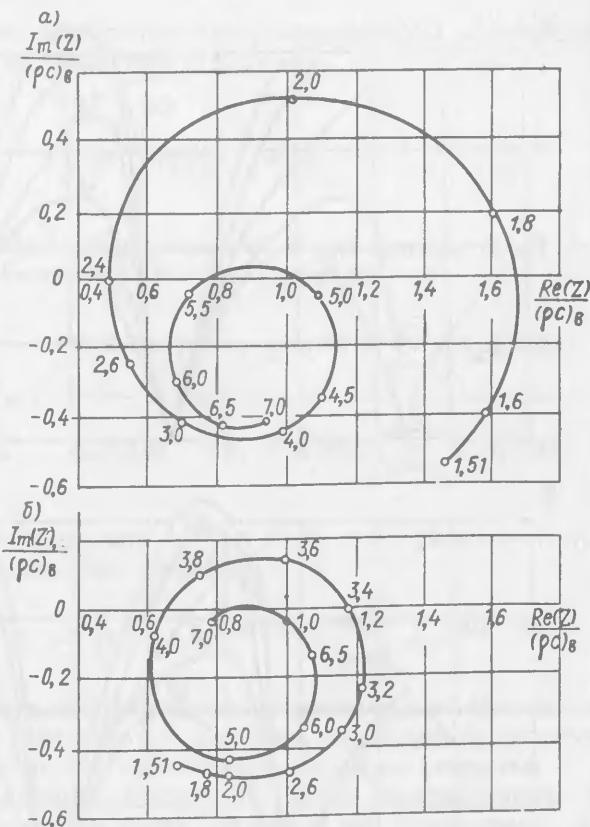
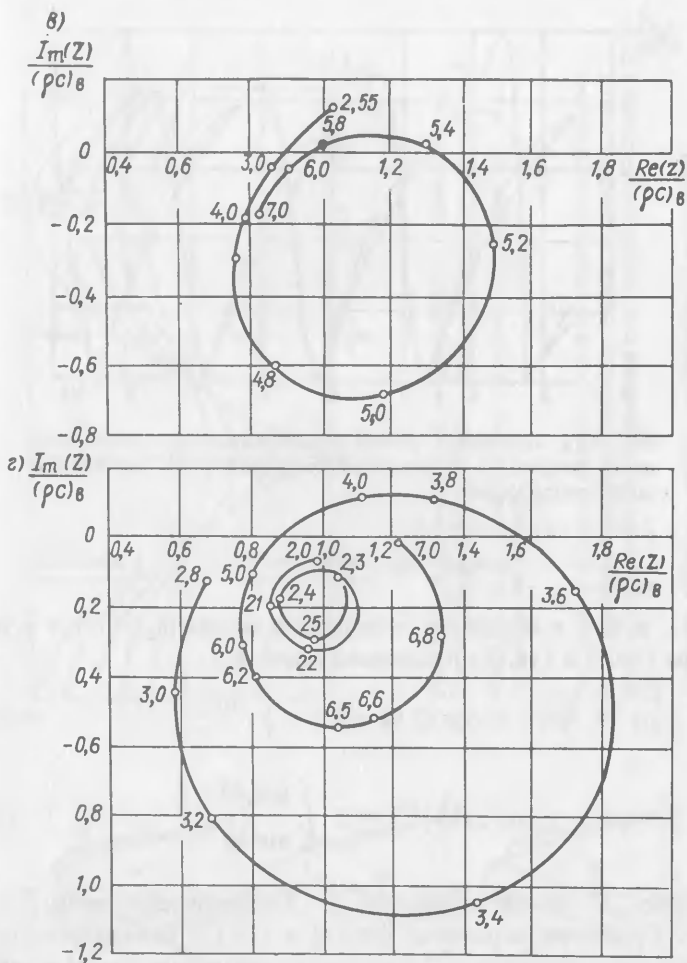


Рис. 5.10. Импеданс-годограф сопротивления излучения цилиндра, расположенного у плоского экрана: а -  $r_1 = +1$ ;  $ka = 1,5$ ;  $r_1 = +1$ ,  $ka = 2,5$ ; б -  $r_2 = -1$ ,  $ka = 1,5$ ;  $r_2 = -1$ ,  $ka = 2,5$ .

Числами на кривых указаны значения  $kb$ .

зависит от характера импеданса экрана. Например, для  $r_2 = -1$  при волновом расстоянии  $kb = 3,6$  значение  $p/\sqrt{W_{ак}}$  получается выше, чем для  $kb = 2,5$  или  $kb = 5,3$  - в случае  $r_1 = +1$ . Отмеченный эффект наблюдается лишь при  $ka > 2,5$ ; в случае меньших  $ka$  зависимости  $p/\sqrt{W_{ак}}$  и  $p$  от  $kb$  практически совпадают.

Анализ характеристик направленности цилиндра  $R(\alpha) = p(\alpha)/p(0)$ , рассчитанных на основании формулы (16.8), показывает (рис. 5.12), что их вид зависит от волнового расстояния  $kb$ : удовлетворительные характеристики формируются цилиндрами со сравнительно малыми волновыми радиусами, причем для  $r_2 = -1$  это соблюдается при  $ka \leq 1,5$ , а для  $r_1 = +1$  - лишь при  $ka \ll 1$ .



Цилиндр с малым волновым радиусом (режим приема). Выражение, определяющее характеристику направленности цилиндра у плоского экрана, в случае малого волнового радиуса  $ka \ll 1$  может быть легко получено даже для произвольного импеданса  $Z_{вх}$ . В этом случае

$$R(\alpha) = 1 + r(\alpha) e^{i 2 kb \cos \alpha} \quad (16.9)$$

При нормальном падении звука на экран ( $\alpha = 0$ ) величина

$$R(0) = \Gamma = \left| 1 + |r(0)| e^{i(2 kb + \varphi)} \right| \quad (16.10)$$

(где  $\varphi$  — фаза коэффициента отражения) характеризует чувствительность цилиндрического приемника у экрана по сравнению с чувствительностью в свободном поле (рис. 5.13). Для абсолютно жесткого экрана



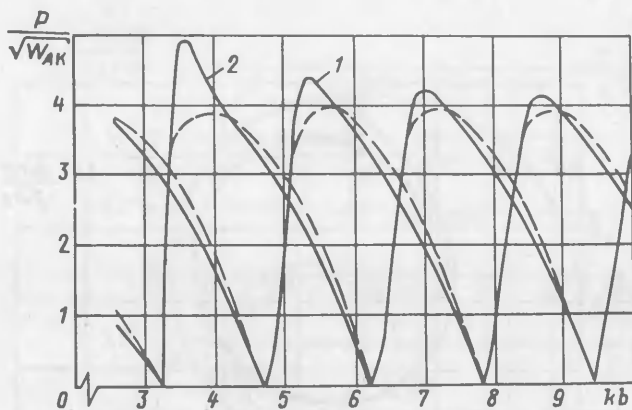


Рис. 5.11. Изменение осевой чувствительности цилиндрического излучателя в зависимости от волнового расстояния до плоского экрана.

1 —  $r_1 = +1$ ; 2 —  $r_2 = -1$ .

— осевая чувствительность; - - - - давление на оси.

( $r_1 = +1$ ,  $\varphi = 0$ ) и абсолютно податливого экрана ( $r_2 = -1$ , т. е.  $\varphi = \pi$ ) формулы (16.9) и (16.10) принимают такой вид

$$R_{1,2}(\alpha) = \left\{ 2[1 \pm \cos(2kb \cos \alpha)] \right\}^{1/2}; \quad (16.11)$$

$$\Gamma_{1,2} = [2(1 \pm \cos 2kb)]^{1/2} = 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos kb \\ \sin kb \end{array} \right\}, \quad (16.12)$$

где индексу „1” соответствует знак „+”, а индексу „2” — знак „-” перед  $\cos 2kb$ . Сравнение выражений (16.11) и (16.12) показывает, что относительная чувствительность  $\Gamma$  однозначно определяет вид характеристики направленности приемника, расположенного перед идеальным плоским экраном. Действительно, при заданном волновом расстоянии  $kb$  от оси цилиндра до экрана зависимость  $R(\cos \alpha)$  совпадает с функцией  $\Gamma(kb)$ . Для построения характеристики направленности достаточно по оси  $kb$  функции  $\Gamma(kb)$  (рис. 5.14) отложить значения  $\cos \alpha$  (в принятой нами системе отсчета углов положение  $\alpha = 90^\circ$  совпадает с началом координат для  $\Gamma(kb)$ ). В случае абсолютно жесткого экрана с точки зрения формирования удовлетворительных характеристик направленности и получения максимальной относительной чувствительности в широком диапазоне изменения  $kb$  предпочтительно располагать приемник вблизи экрана — на расстоянии  $b \approx 0$  (рис. 5.14, б, левый). Для податливого экрана оптимальным является расстояние  $kb = \pi/2$  (рис. 5.14, а, правый).

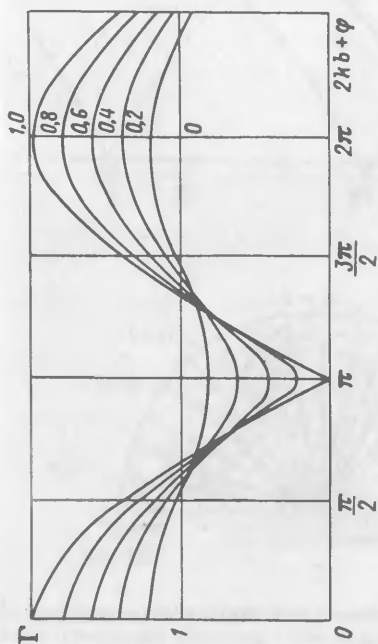
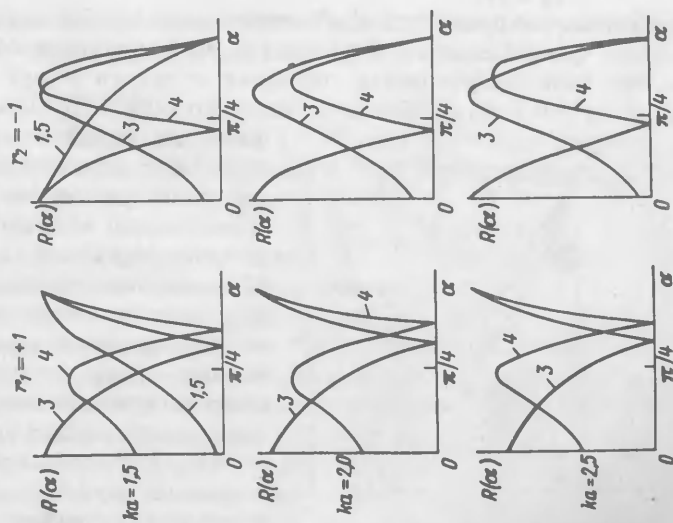


Рис. 5.12. Характеристики направленности цилиндрического излучателя, расположенного у плоского бесконечного экрана. Числами на кривых указано волновое расстояние  $kb$  от оси цилиндра до экрана.

Рис. 5.13. Изменение относительной чувствительности приемника, расположенного у плоского экрана, в зависимости от фазы  $\varphi$  коэффициента отражения  $\gamma$  и волнового расстояния  $kb$ .

Параметр кривых — модуль коэффициента отражения.



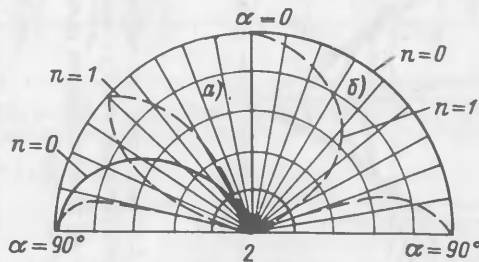
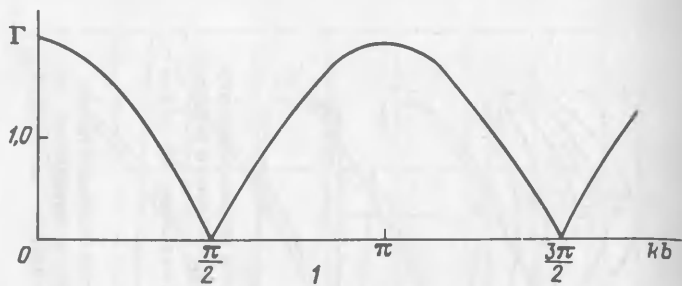


Рис. 5.14. Относительная чувствительность (кривые 1) и приемника, расположенного у плоского идеального экрана.

Слева – случай абсолютно жесткого экрана, справа – случай  $kb = n\pi$ .

С приближением приемника к абсолютно податливому экрану его относительная чувствительность будет падать. Это, в частности, объясняется тем, что фаза коэффициента отражения от такого экрана  $\varphi = \pi$  в отличие от  $\varphi = 0$  в случае абсолютно жесткого экрана. Для получения

фазы, не равной  $\pi$ , достаточно между податливым экраном и приемником поместить тонкую металлическую пластину толщиной  $l$  [175, 177]. Строгое решение задачи о поле точечного источника вблизи тонкого металлического слоя, лежащего на абсолютно податливом полупространстве, получено в работе [74]. Показано, что при локальном воздействии звука неоднородные волны в слое практически не влияют на поле в дальней зоне. Поэтому в нашем случае для нахождения

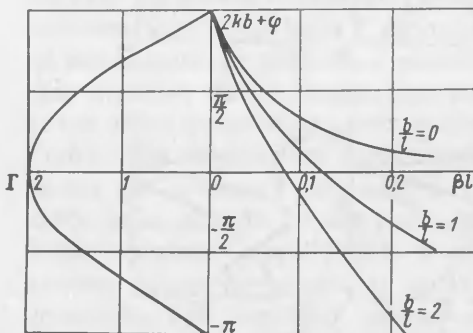
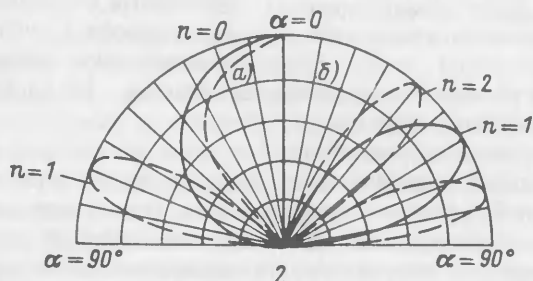
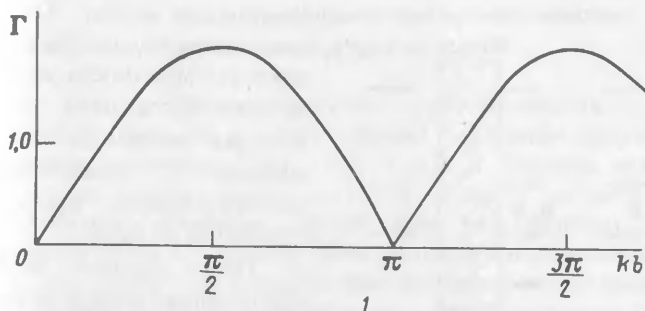


Рис. 5.15. К определению относительной чувствительности цилиндрического приемника, расположенного вблизи металлической пластины, нагруженной на воздух.



характеристики направленности (кривые 2) цилиндрического

абсолютно податливого экрана:  $a - kb = (2n + 1)\pi/2$ ;  $b -$

относительной чувствительности цилиндрического приемника можно считать, что система обладает входным импедансом

$$Z_{вх} = -i\rho c\beta l,$$

получаемым из формулы (1.34) при  $Z_n = 0$ , и модулем коэффициента отражения  $|r| = 1$ . Фаза  $\varphi$  при нормальном падении звука на экран рассчитывается по формуле (2.13).

С учетом выражения (16.10) и формулы (2.13) построим зависимость величины  $\varphi + 2kb$  от  $\beta l$  для различных отношений  $b/l$  — расстояния от приемника до экрана — к толщине  $l$  металлического (для конкретности, стального с  $m = 31$ ) слоя (рис. 5.15, правая часть). На левой стороне рисунка приведена зависимость относительной чувствительности  $\Gamma(2kb + \varphi)$ , рассчитанная по формуле (16.10). Используя этот график, находим взаимосвязь  $\Gamma$  с волновой толщиной стальной пластины  $\beta l$  при различных  $b/l$  (рис. 5.16). Видно, что относительная чувствительность приемника зависит как от  $\beta l$ , так и от  $b/l$ .

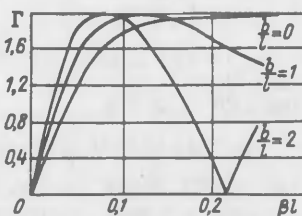


Рис. 5.16. Зависимость относительной чувствительности приемника от волновой толщины стальной пластины.

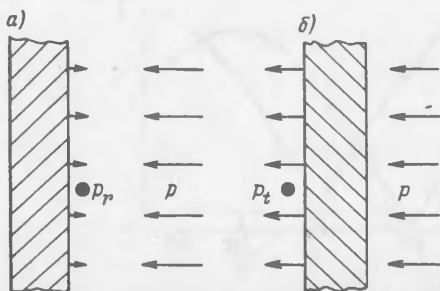


Рис. 5.17. К определению тыльного лепестка характеристики направленности приемника, расположенного вблизи экранирующего слоя.

тельной чувствительности, которая происходит с приближением приемника к абсолютно податливому экрану.

Выше рассмотрены случаи идеальных экранов, которые не пропускали звук. Поскольку экранирующие слои ограниченной толщины, как показано в § 2 и 3, обладают определенным, зачастую существенным коэффициентом прохождения, найдем, как это влияет на тыльный лепесток характеристики направленности цилиндрического приемника, расположенного на фоне экрана. Пусть  $p$  — давление в плоской звуковой волне. В месте расположения приемника звуковое поле обусловлено интерференцией падающей и отраженной волн (рис. 5.17, а). С тыла преобразователь будет принимать сигнал, характеризующийся давлением в прошедшей волне  $p_t$  (рис. 5.17, б). Поэтому тыльный лепесток характеристики направленности при угле падения звука  $180^\circ$  с учетом формулы (16.10) определится как

$$\sigma_T = |p_t / (p + p_r)| = |t(0) / [1 + |r(0)| e^{i(2kb + \varphi)}]|. \quad (16.13)$$

Выражение (16.13) служит коэффициентом передачи давления через экран и совпадает с величиной, обратной звукоизоляции, определяемой в работе [14] как отношение звуковых давлений перед экраном и позади него. Если рассматривать экран без механических потерь, то с использованием формулы (2.2) из выражения (16.13) получаем при  $2kb + \varphi = 0$

$$\sigma_T = [(1 - |r|) / (1 + |r|)]^{1/2} < 1;$$

$$\text{при } 2kb + \varphi = \pi$$

$$\sigma_T = [(1 + |r|) / (1 - |r|)]^{1/2} > 1.$$

Это значит, что в случае, когда приемник перед плоским экраном расположен в пучности давления, значение  $\sigma_T$  минимально, а относительная чувствительность  $\Gamma$  — максимальна. И наоборот, если приемник помещен в минимум давления стоячей волны перед экраном, тыльный лепесток может быть больше единицы, а относительная чувствительность при этом будет невелика.

При весьма малом  $b/l \approx 0$ , т. е. при расположении приемника на поверхности металлического листа, даже для небольших волновых толщин металла  $\beta l$  относительная чувствительность приемника отличается от нуля.

Таким образом, наличие сравнительно тонкой металлической прослойки между приемником и податливым экраном позволяет избавиться от нежелательной потери относительной чувствительности, которая происходит с приближением приемника к абсолютно податливому экрану.

## § 17. Цилиндрический преобразователь, заполненный упругой средой

Цилиндрические преобразователи, используемые в гидроакустике, по конструктивным признакам делятся на силовые и компенсированные [86] (рис. 5.18). В силовых преобразователях внутренняя полость заполнена газом, а торцы закрыты жесткими металлическими фланцами, акустически развязанными от активного пьезокерамического кольца. Фланцы препятствуют сжатию газа, играющего роль внутреннего экрана, под действием гидростатического давления. Компенсированные преобразователи представляют собой свободно обтекаемое кольцо, в котором активные элементы подвергаются объемному сжатию. Акустические характеристики таких преобразователей зависят от параметров их внутренней полости. В одной из первых работ, посвященных исследованию цилиндрических водозаполненных преобразователей [158], предложен приближенный метод расчета характеристик тонкостенных пьезокерамических трубок. В книге [63] отмечена возможность работы свободно обтекаемого цилиндра, изготовленного из магнитострикционной ленты в виде многослойного кольца. Однако при заполнении водой цилиндрического преобразователя малой высоты происходит нежелательное противозазное излучение, и для его исключения внутреннюю поверхность преобразователя экранируют [55, 93, 96, 166]. Теория, развитая для цилиндра конечной высоты в абсолютно жестких соосных цилиндрических экранах [113, 115, 125, 138, 185], не позволяет учесть излучение из внутренней полости преобразователя компенсированной конструкции. В случае отношения высоты к радиусу  $h/a \approx 1$  цилиндр при расчете заменяют сферическим экваториальным поясом [42], и методом наименьших квадратов определяют поле и сопротивление излучения таких водозаполненных преобразователей. Акустический импеданс цилиндра конечной высоты, излучающего торцевыми поверхностями, с применением численных методов решения интегральных уравнений Гельмгольца исследован в работе [71].

В настоящем параграфе с использованием результатов, полученных в гл. 2, разработан простой приближенный метод расчета параметров

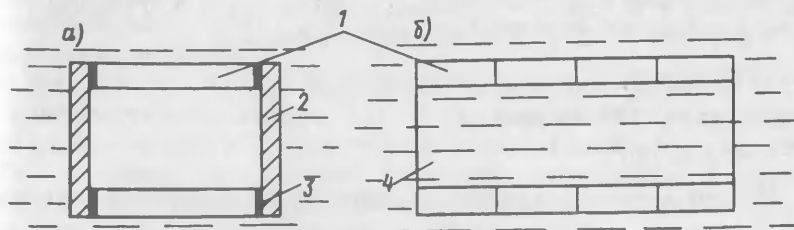


Рис. 5.18. Типы цилиндрических преобразователей: а – силовые; б – компенсированные.

1 – активное кольцо; 2 – силовой фланец; 3 – развязка; 4 – внутренняя полость.

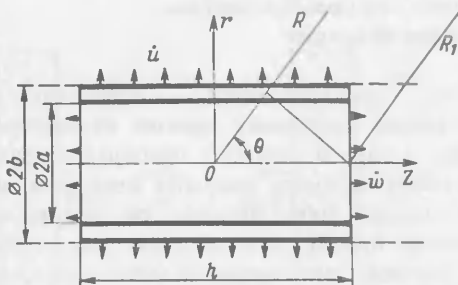


Рис. 5.19. К определению поля излучения цилиндрического преобразователя компенсированного типа.

цилиндрического преобразователя конечной высоты с учетом излучения торцов его внутреннего объема, заполненного средой с произвольным коэффициентом Пуассона. При решении задачи для получения аналитических выражений предполагаем, что торцы излучают как односторонние плоские поршни без экрана, а наружная поверхность преобразователя — как непрозрачный цилиндр в абсолютно жестких полубесконечных цилиндрических экранах (рис. 5.19). По-видимому, для не очень коротких цилиндров — с отношением высоты к радиусу  $h/a > 3 \div 4$  — такое представление вполне оправдано. Допущение, которое делается при указанной постановке задачи, заключается в пренебрежении взаимодействием цилиндрической и торцевых поверхностей, а также противоположных торцов внутренней полости между собой. Если принять, что внешняя боковая поверхность цилиндра и торцы внутренней полости колеблются соответственно со скоростями  $\dot{u}$  и  $\dot{w}$ , то давления, развиваемые ими в дальнем поле, записываются на основании работ [50, 115] в следующем виде:

$$p_{\dot{u}}(\alpha) = -i(\rho c)_B \dot{u} \frac{kh}{i\pi \sin \alpha H_1(kb \sin \alpha)} - \frac{\sin[(kh/2) \cos \alpha]}{(kh/2) \cos \alpha} \times \frac{e^{ikR}}{kR}; \quad (17.1)$$

$$p_{\dot{w}}(\alpha) = -i(\rho c)_B \dot{w} \frac{(ka)^2}{4} \left[ \frac{2J_1(ka \sin \alpha)}{ka \sin \alpha} + F_1(ka) E_1(\cos \alpha) \right] \times \frac{e^{ikR_1}}{kR_1}, \quad (17.2)$$

где  $F_1(ka)$  и  $E_1(\cos \alpha)$  — функции, вычисленные Л. Я. Гутиним [50]. В формуле (17.2) угол  $\alpha$  изменяется в пределах  $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ,

а в формуле (17.1) — в пределах

$$0 \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

Найдем вначале отношение давления на оси преобразователя (при  $\alpha = 0^\circ$ )

$$p_z = p_{\dot{u}}(0) + p_{\dot{w}}(0) \quad (17.3)$$

(в этом случае в формулах (17.1) и (17.2) следует принять  $R_1 = R - h/2$ ) к давлению, излучаемому цилиндром в радиальном направлении (для  $\alpha = 90^\circ$ )

$$p_r = p_{\dot{u}}(90^\circ) + 2p_{\dot{w}}(90^\circ) \quad (17.4)$$

(при этом  $R_1 = R$ ). Появление множителя „2” перед  $p_{\dot{w}}(90^\circ)$  в последней формуле объясняется тем, что в направлении  $\alpha = 90^\circ$  излучают оба торца внутренней полости преобразователя. Учитывая формулы (17.1) – (17.4), найдем

$$A = \frac{p_z}{p_r} = \frac{p_{\dot{u}}(0)}{p_{\dot{u}}(90^\circ)} \frac{1 + \frac{p_{\dot{w}}(0)}{p_{\dot{u}}(0)}}{1 + \frac{2p_{\dot{w}}(90^\circ)}{p_{\dot{u}}(90^\circ)}} \quad (17.5)$$

Здесь член

$$\frac{p_{\dot{u}}(0)}{p_{\dot{u}}(90^\circ)} = \frac{i}{2} \frac{\sin(kh/2)}{kh/2} \pi kb H_1(kb) = A' \quad (17.6)$$

определяет отношение осевого давления к радиальному для случая цилиндра в абсолютно жестких полубесконечных экранах [138]. Вклад внутреннего объема в поле излучения цилиндра характеризуется второй дробью в выражении (17.5). Подставляя в него значения, определяемые формулами (17.1) и (17.2) при  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$ , с учетом формулы (17.6) получим

$$A = A' \frac{1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \epsilon \frac{a}{h} [1 + F_1(ka) E_1(1)] \frac{kh/2}{\sin(kh/2)} e^{-ikh/2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \epsilon \frac{a}{h} \frac{2J_1(ka)}{ka} i \pi kb H_1(kb)} \quad (17.7)$$

В формулу (17.7) входит отношение колебательной скорости торца внутреннего объема цилиндра  $\dot{w}$  к радиальной скорости наружной цилиндрической поверхности излучателя  $\dot{u}$ . Если цилиндр тонкостенный ( $\epsilon = a/b \approx 1$ ), то его внутренняя поверхность колеблется также со скоростью  $\dot{u}$ . Модуль отношения  $\dot{w}/\dot{u}$  в этом случае определяется выражением (7.23), взятым с обратным знаком, так как при его выводе принималось, что вектор скорости  $\dot{u}$  направлен внутрь цилиндра, в отличие от направления  $\dot{u}$  в выражении (17.1). Вклад торцов цилиндрического преобразователя с  $\epsilon \approx 1$  в общее поле излучения пренебрежимо мал, и его можно не учитывать.

Зависимости  $A(ka)$ , построенные на основании формулы (17.7) для цилиндров с параметром  $h/a \geq 4$ , обнаруживают ярко выраженный максимум (рис. 5.20, а), положение которого сдвигается с ростом  $h/a$  в область меньших  $ka$ , амплитуда увеличивается, а ширина (табл. 11) уменьшается. Таким образом, при определенных  $ka$  давление, излученное цилиндрическим преобразователем с внутренней полостью, заполненной упругой средой, в направлении его оси превышает давление, излученное вдоль радиуса. Однако, вероятнее всего, в области углов, отличающихся от  $\alpha = 0^\circ$ , давление будет падать, и общая акустическая энергия, излученная в полупространство, расположенное справа



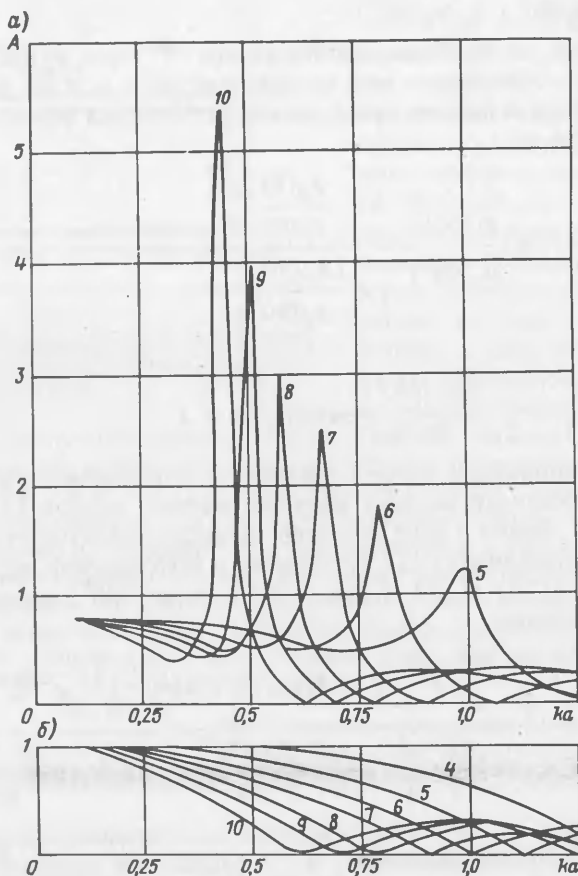


Рис. 5.20. Зависимости отношения давления, излученного цилиндром вдоль его оси, к давлению, излученному вдоль радиуса, от волнового радиуса цилиндра: а – рассчитанные по формуле (17.7) при  $\nu = 0,4$ ;  $m = 0,5$  для различных  $h/a$ ; б – зависимости  $A'$  от  $ka$ .

(или слева) от торцов полости (см. рис. 5.19), будет невелика по сравнению с энергией, излученной в радиальном направлении, т. е. в область углов  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ . Проверить это предположение можно, рассчитав ненормированную характеристику направленности

Таблица 11. Зависимость относительной ширины максимума функции  $A$  на уровне 0,7 от параметра  $h/a$

| $h/a$                   | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{\Delta(ka)}{ka}$ | 0,44 | 0,28 | 0,18 | 0,11 | 0,05 | 0,03 | 0,01 |

цилиндрического преобразователя. Складывая давления (17.1) и (17.2), находим

$$R(\alpha) = \left| \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \frac{h}{a} \cos \alpha\right)}{\frac{ka}{2} \frac{h}{a} \cos \alpha} \frac{1}{i \pi kb \sin \alpha H_1(kb \sin \alpha)} - \frac{1}{4} \frac{a}{h} \epsilon \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \frac{2 J_1(ka \sin \alpha)}{ka \sin \alpha} e^{-i \frac{ka}{2} \frac{h}{a} \cos \alpha} \right|, \quad (17.8)$$

причем при расчете достаточно принять угол  $\alpha$ , изменяющимся в пределах

$$0^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

С ростом  $ka$  излучение вдоль оси  $z$  уменьшается, причем это происходит тем сильнее, чем выше цилиндр. График изменения  $A'$ , построенный в том же масштабе, что и график на рис. 5.20, *a*, для аналогичных  $h/a$  (см. рис. 5.20, *б*), резко отличается от  $A$  как по характеру, так и по уровню кривых.

При  $ka \ll 1$  и  $kh \ll 1$  функция на рис. 5.20, *a* стремится к значению

$$A = \frac{1 + \frac{1}{2} \epsilon \frac{\nu}{1 - \nu}}{1 + \epsilon \frac{\nu}{1 - \nu}},$$

которое получается из формулы (17.7), если в выражении (7.23) для  $|\dot{w}/\dot{u}|$  положить  $R_T/(\rho c)_B = X_T/(\rho c)_B = 0$  и в соответствии с работой [43] принять  $i \pi kb H_1(kb) = 2$ . Видно, что при  $\nu = 0,5$  и  $\epsilon = 1$   $A = 0,75$ . Если  $\nu \rightarrow 0$ , то  $A \rightarrow 1$ .

Определим давление, излучаемое преобразователем вдоль радиуса. Из соотношения (17.4) с учетом формул (17.1) и (17.2) при  $\alpha = 90^\circ$  получим

$$p_r = (\rho c)_B (ka)^2 \dot{u} \left| \frac{h}{a} \frac{1/\epsilon}{i \pi kb H_1(kb)} - \frac{\dot{w}}{\dot{u}} \frac{J_1(ka)}{ka} \right|. \quad (17.9)$$

Учитывая, что внутренняя поверхность преобразователя нагружена на импеданс  $Z_{вх}$ , определяемый выражениями (7.20) и (7.21), и принимая нагрузку внешней поверхности цилиндра равной сопротивлению излучения  $Z_s$  конечного по высоте цилиндра в бесконечно жестких

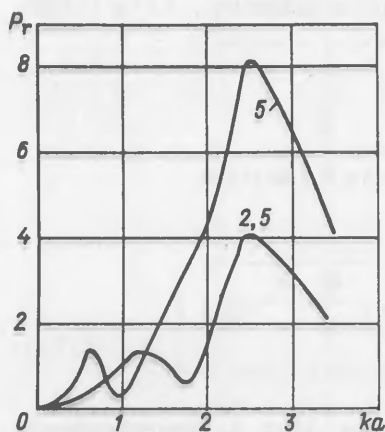


Рис. 5.21. Характер изменения давления  $P_r(ka)$ , излученного водозаполненным цилиндром в радиальном направлении, для различных  $h/a$ .

Подставив формулы (17.12) и (17.13) в выражение (17.11), получим

$$\frac{Z_{MC}}{(\rho c)_B} = (kb)_p (1 - \epsilon) \frac{\rho_K}{\rho_B} \left[ \frac{kb}{(kb)_p} - \frac{(kb)_p}{kb} \right], \quad (17.14)$$

где  $(kb)_p$  — резонансный волновой радиус преобразователя в воде;  $\rho_B$  — плотность воды.

Типичная зависимость  $p_r(ka)$ , рассчитанная на основании формулы (17.9) для частного случая водозаполненного цилиндра ( $\nu = 0,5, m = 1$ ) с параметром  $(kb)_p (1 - \epsilon) \rho_K / \rho_B$ , приведена на рис. 5.21. Укажем на два резонанса кривой  $p_r$ , один из которых обусловлен радиальными колебаниями цилиндра, а второй — низкочастотный — колебаниями столба жидкости внутри цилиндра. С увеличением отношения  $h/a$  положение этого резонанса сдвигается влево по оси  $ka$ , а его уровень, по сравнению с давлением, излученным на частоте основного резонанса — уменьшается.

Таким образом, полученные выражения позволяют проводить расчеты акустических параметров цилиндрических преобразователей, внутренняя полость которых содержит среду с произвольным коэффициентом Пуассона.

цилиндрических экранах [116], величину радиального смещения  $u$  преобразователя вычисляем как

$$\dot{u} \approx \left\{ \left[ \frac{R_{Bx}}{(\rho c)_B} \right]^2 + \left[ \frac{R_s}{(\rho c)_B} \right]^2 + \left[ \frac{Z_{MC}}{(\rho c)_B} + \frac{X_{Bx}}{(\rho c)_B} - \frac{X_s}{(\rho c)_B} \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (17.10)$$

где  $Z_{MC}$  — собственный удельный (на единицу площади) реактивный импеданс пьезокерамического кольца

$$Z_{MC} = -(\omega M - 1/\omega C) \times 1/\pi b^2 h; \quad (17.11)$$

$$M = 2\pi b^2 h (1 - \epsilon) \rho_K \quad (17.12)$$

— масса преобразователя;

$$1/C = 2\pi h (1 - \epsilon) E \quad (17.13)$$

— его упругость.

1. Агеева Н. С. Измерение акустических параметров материалов на ультразвуковых частотах при помощи импульсной трубы. — Акуст. журн., 1955, т. 1, вып. 2, с. 110–120.
2. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестоपालов В. П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. — ЖТФ, 1962, т. 32, № 4, с. 381–394.
3. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 1957.
4. Андреев Н. Н. О колебаниях кварцевой пластины по толщине. — ЖТФ, 1932, т. 2, № 1, с. 119–124.
5. Аранович В. Б., Прудов И. А. О резонансном согласовании в тонких переходных слоях. — Акуст. журн., 1971, т. 17, вып. 4, с. 513–520.
6. Атабеков Г. И. Основы теории цепей. М., Энергия, 1969.
7. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., Высшая школа, 1961.
8. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. Пер. с нем./Под ред. В. С. Григорьева и Л. Д. Розенберга. М., ИЛ, 1956.
9. Бидерман В. Л. Вопросы расчета резиновых деталей на прочность. — В сб.: Расчеты на прочность. М., Машгиз, 1958, вып. 3, с. 40–87.
10. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М., Высшая школа, 1972.
11. Бидерман В. Л., Мартынова Г. В. О применении вариационного принципа Лагранжа к расчету деталей из несжимаемого материала. — Изв. вузов. Машиностроение, 1973, № 6, с. 5–10.
12. Бидерман В. Л., Мартынова Г. В. Вариационный метод расчета деталей из несжимаемого материала. — В сб.: Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1977, вып. 18, с. 3–27.
13. Боббер Р. Дж. Гидроакустические измерения. Пер. с англ./Под ред. А. Н. Голенкова. М., Мир, 1974.
14. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. 2-е изд. М., Наука, 1973.
15. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М., Наука, 1982.
16. Бриккер В. Е., Глазанов В. Е., Марьянский М. М. Измерение комплексных модулей упругости резины и пенопластов на виброметре. — Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1968, вып. 63, с. 182–187.
17. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос. — ЖЭТФ, 1955, т. 25, № 5, с. 847–852.
18. Ван-Цзи-де. Прикладная теория упругости. Пер. с англ./Под ред. А. С. Вольмира. М., Физматгиз, 1959.
19. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Пер. с англ. В. С. Берман. Ч. 1. М., ИЛ, 1949.
20. Виштак А. П., Шульга Н. А. Толщинные колебания регулярно-слоистых пластин. — Прикладная механика, 1983, т. 19, № 11, с. 122–124.
21. Вовк А. Е., Пастернак Р. Н., Тютюкин В. В. Экспериментальное исследование волновых свойств среды с цилиндрическими каналами. — Акуст. журн., 1958, т. 4, вып. 1, с. 24–32.
22. Вовк А. Е., Тютюкин В. В. О „сверхвязких“ продольных волнах в упругой среде. — Акуст. журн., 1961, т. 7, вып. 2, с. 256–257.
23. Вовк И. В. Излучение звука цилиндром, охваченным незамкнутым кольцевым слоем. — Акуст. журн., 1980, т. 26, вып. 3, с. 364–370.

24. Вовк И. В. Дифракция звуковой волны на решетке из жестких цилиндров с упругими крышками. — Прикладная механика, 1981, т. 17, № 8, с. 107—110.
25. Вовк И. В., Гринченко В. Т. К вопросу о направленности цилиндрического излучателя, частично покрытого слоем экранирующего материала. — Акуст. журн., 1975, т. 21, вып. 2, с. 294—296.
26. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Маяцкий В. И. Звуковое поле бесконечного кругового цилиндрического преобразователя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. — Акуст. журн., 1972, т. 18, вып. 3, с. 365—369.
27. Волков Р. Л. Об акустическом сопротивлении воздушного слоя. — ЖТФ, 1936, т. 6, № 4, с. 700—708.
28. Глазанов В. Е. К вопросу об определении скорости распространения упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. — Акуст. журн., 1962, т. 8, вып. 4, с. 468—469.
29. Глазанов В. Е. Дифракция плоской продольной волны на решетке из цилиндрических полостей в упругой среде. — Акуст. журн., 1967, т. 13, вып. 3, с. 352—360.
30. Глазанов В. Е. Дифракция волны, излученной цилиндром, на решетке из акустически мягких цилиндров. — Акуст. журн., 1968, т. 14, вып. 4, с. 532—537.
31. Глазанов В. Е. Влияние абсолютно податливых рассеивателей на сопротивление излучения акустически прозрачного цилиндра. VI Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1968, секция А, III—I.
32. Глазанов В. Е. О коэффициенте передачи колебательной скорости через два слоя. VIII Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1973, секция 3, с. 119—122.
33. Глазанов В. Е. Некоторые задачи распространения звука в упругих средах. (Курс лекций). Таганрог, ТРТИ, 1973.
34. Глазанов В. Е. Входной импеданс на боковой поверхности радиально возбуждаемого цилиндра. — Акуст. журн., 1976, т. 22, вып. 2, с. 206—213.
35. Глазанов В. Е. Входной импеданс на боковой поверхности радиально возбуждаемого цилиндра с неодинаковыми нагрузками на торцах. IX Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1977, секция А, с. 87—90.
36. Глазанов В. Е. О влиянии механических потерь в пьезокерамике на акустико-механический КПД экранированного стержневого преобразователя. — В сб.: Акустические методы и средства исследования океана. Владивосток, 1974, с. 23—27.
37. Глазанов В. Е. Излучение цилиндра, расположенного у плоского бесконечного экрана. — В сб.: Дифракционные и вероятностные задачи судовой акустики. Л., Судостроение, 1979, с. 6—15.
38. Глазанов В. Е., Шендеров Е. Л. К вопросу о рассеянии плоских волн цилиндрической полостью в изотропной упругой среде. — Акуст. журн., 1971, т. 17, вып. 1, с. 151—153.
39. Глазанов В. Е., Завалина И. Н., Орлова В. И. Упругость и прочность полиуретановых пенопластов с полостями цилиндрической формы. — Механика полимеров, 1971, № 5, с. 813—819.
40. Головчан В. Т., Гузь А. Н. Дифракция упругих волн на бесконечном ряде круговых цилиндров. — Докл. АН СССР. Сер.: Математика, физика, 1969, т. 186, № 1, 2, 3, с. 286—288.
41. Голубев А. С. Отражение плоских волн от цилиндрического дефекта. — Акуст. журн., 1961, т. 7, вып. 2, с. 174—180.
42. Гоц А. А., Дианов Д. Б. Акустическое поле экваториального сферического пояса. VIII Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1973, секция 3, с. 100—103.
43. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
44. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев, Наукова думка, 1978.

45. Гринченко В. Т., Лулева С. А. Звуковое поле экранированного кругового цилиндра. — Акуст. журн., 1980, т. 26, вып. 3, с. 462–466.
46. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев, Наукова думка, 1981.
47. Гринченко В. Т., Сенченко И. В. Излучение звука частично экранированными пьезокерамическими оболочками. — Прикладная механика, 1982, т. 18, № 2, с. 15–21.
48. Гузь А. Н., Кубенко В. Д., Черевко М. А. Дифракция упругих волн. Киев, Наукова думка, 1977.
49. Гузь А. Н., Рябуха Ю. Н., Шульга Н. А. Излучение цилиндрической оболочки вблизи тонкой пластины. — Прикладная механика, 1981, т. 17, № 9, с. 21–26.
50. Гутин Л. Я. Избранные труды. Л., Судостроение, 1977.
51. Дианов Д. Б. Об излучении ультразвуковых волн через плоскопараллельные слои. — Акуст. журн., 1959, т. 5, вып. 1, с. 31–37.
52. Дианов Д. Б., Задириенко И. М. О влиянии акустически мягких экранов на некоторые параметры широкополосных цилиндрических преобразователей с наружным переходным слоем. — Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1972, вып. 112, с. 15–18.
53. Дианов Д. Б., Задириенко И. М., Кузьменко А. Г. Исследование частотных характеристик и направленности цилиндрического преобразователя в мягком экране. — Акуст. журн., 1973, т. 19, вып. 5, с. 677–684.
54. Дианов Д. Б., Задириенко И. М., Кузьменко А. Г. Акустические характеристики экранированного цилиндрического пьезоэлектрического преобразователя, излучающего через слой жидкости. — Акуст. журн., 1981, т. 27, вып. 3, с. 358–362.
55. Дианов Д. Б., Козырев В. А., Кузьменко А. Г. Цилиндрический пьезокерамический излучатель с внутренним заполнением. — В сб.: Основные задачи акустики в судостроении, т. 2. ЛКИ, 1969, с. 64–72.
56. Дианов Д. Б., Кузнецов В. М. Влияние переходных слоев на частотные характеристики стержневых преобразователей. — Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1968, вып. 63, с. 60–78.
57. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. Расчет входного акустического сопротивления и коэффициента передачи по мощности цилиндрического слоя, нагруженного на жидкую среду, с учетом потерь. Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1972, вып. 112, с. 3–6.
58. Дианов Д. Б., Кузьменко А. Г. О частотных характеристиках цилиндрических преобразователей с переходным слоем и внутренним заполнением. — Акуст. журн., 1973, т. 19, вып. 4, с. 531–535.
59. Дымников С. И., Лавендел Э. Э. Статический расчет некоторых видов резино-металлических амортизаторов сжатия в случае больших деформаций. — В сб.: Вопросы динамики и прочности, Рига, Зинатне, 1968, вып. 16, с. 185–200.
60. Евдокимов Н. А. Гидроакустическая аппаратура, ч. 1. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), 1957.
61. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск, Наука и техника, 1968.
62. Исакович М. А. Общая акустика. М., Наука, 1973.
63. Камп Л. Подводная акустика. Пер. с англ./Под ред. С. Н. Ржевкина. М., Мир, 1972.
64. Каргин В. А., Слонимский Г. Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров. МГУ, 1960.
65. Карновский М. И., Лозовик В. Г. Акустическое поле бесконечного кругового цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. — Акуст. журн., 1964, т. 10, вып. 3, с. 313–317.
66. Кац А. М. Теория упругости. М., ГИТТЛ, 1956.

67. Кинг К., Мимно Г., Уинг А. Передающие линии, антенны и волноводы. Пер. с англ./Под ред. С. Я. Турлыгина. М.—Л., Госэнергоиздат, 1948.
68. Клей К., Медвин Г. Акустическая океанография. Пер. с англ./Под ред. Ю. Ю. Житковского. М., Мир, 1980.
69. Климов А. Е., Лейко А. Г. Дифракция звуковых волн на системе цилиндров, расположенных в незамкнутых кольцевых слоях. — Акуст. журн., 1979, т. 25, вып. 5, с. 717—724.
70. Клюкин И. И. Борьба с шумом и звуковой вибрацией на судах. 2-е изд. Л., Судостроение, 1971.
71. Козырев В. А., Шендеров Е. Л. О сопротивлении излучения цилиндра конечной высоты. — Акуст. журн., 1980, т. 26, вып. 3, с. 422—432.
72. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. Пер. с англ./Под ред. В. С. Ленского. М., ИЛ, 1955.
73. Коренев Б. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. М., Физматгиз, 1960.
74. Красильников В. Н. Влияние тонкого упругого слоя на распространение звука в жидком полупространстве. — Акуст. журн., 1960, т. 6, вып. 2, с. 220—228.
75. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Пер. с англ./Под ред. Ю. М. Тарнопольского. М., Мир, 1982.
76. Кэди У. Пьезоэлектричество и его практическое применение. Пер. с англ./Под ред. А. В. Шубникова. М., ИЛ, 1949.
77. Лавендел Э. Э., Хричиков В. В. Расчет жесткости резиновых деталей при больших деформациях. — В сб.: Вопросы динамики и прочности. Рига, Зинатне, 1977, вып. 35, с. 131—136.
78. Лавендел Э. Э. Расчет резинотехнических изделий. М., Машиностроение, 1976.
79. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., Наука, 1965.
80. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
81. Лейко А. Г., Климов А. Е. Дифракция плоской звуковой волны на резонансном цилиндрическом преобразователе, частично покрытом звукоотражающим слоем конечной толщины. IX Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1977, секция II, с. 33—39.
82. Лепетов В. А., Юрцев Л. Н. Расчеты и конструирование резиновых изделий. Л., Химия, 1977.
83. Лэмб Г. Гидродинамика. Пер. с англ./Под ред. Н. А. Слезкина. М., ОГИЗ, 1947.
84. Лэмб Г. Динамическая теория звука. Пер. с англ./Под ред. М. А. Исаквича. М., Физматгиз, 1960.
85. Ляв А. Математическая теория упругости. Пер. с англ./Под ред. Б. В. Булгакова и В. Я. Натанзона. М.—Л., ОНТИ, 1935.
86. Мейер Е., Оберст Х. Резонансные гидроакустические поглотители. — В сб.: Проблемы современной физики. Вып. 9, Акустика, М., ИЛ, 1953, с. 171—188.
87. Мейер Е., Тамм К. Широкополосные гидроакустические звукопоглотители. — В сб.: Проблемы современной физики. Вып. 9, Акустика, М., ИЛ, 1953, с. 157—170.
88. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуке. Пер. с англ./Под ред. А. В. Шубникова и С. Н. Ржевкина. М., ИЛ, 1952.
89. Некоторые вопросы прикладной акустики. Пер. с англ./Под ред. Э. И. Цветкова и С. А. Шерешевского. М., Воениздат, 1962.
90. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
91. Обозненко И. Л. О скалярном поле цилиндрического излучателя при смешанных граничных условиях на его поверхности. — В сб.: Вестник Киевского политех. ин-та. Серия Радиоэлектроника, 1965, вып. 2, с. 59—64.
92. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. МГУ, 1969.
93. Орлов Л. В., Шабров А. А. Расчет и проектирование антенн гидроакустических рыбопоисковых станций. М., Пищевая промышленность, 1974.

94. Пирогов В. А., Рейзин Е. С., Тартаковский Б. Д. Согласующие слои для приемных электроакустических преобразователей. — Акуст. журн., 1973, т. 19, вып. 5, с. 754–760.
95. Подводная акустика. Пер. с англ./Под ред. Л. М. Бреховских. М., Мир, 1965.
96. Подводные электроакустические преобразователи. Расчет и проектирование. Справочник/Под ред. В. В. Богородского. Л., Судостроение, 1983.
97. Потураев В. Н. Резиновые и резино-металлические детали машин. М., Машиностроение, 1966.
98. Потураев В. Н., Дырда В. И. Резиновые детали машин. М., Машиностроение, 1977.
99. Резникова З. Д., Шкварников А. П. Распространение нулевой нормальной волны в измерительной акустической трубе со стальными стенками конечной толщины. Акуст. журн., 1971, т. 17, вып. 1, 110–115.
100. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. МГУ, 1960.
101. Росин Г. С. О коэффициенте формы образца при измерениях динамического модуля упругости. Акуст. журн., 1968, т. 14, вып. 1, с. 95–100.
102. Рубанов И. Л. К вопросу о звуковом поле цилиндрического излучателя со смешанными граничными условиями. — Акуст. журн., 1978, т. 24, вып. 3, с. 401–405.
103. Русаков И. Г. Пьезоэлектрический преобразователь высокой частоты. — ЖТФ, 1943, т. 13, № 9–10, с. 485–501.
104. Рытов С. М. Электромагнитные свойства мелкослоистой среды. — ЖЭТФ, 1955, т. 29, вып. 5 (11), с. 605–616.
105. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослоистой среды. — Акуст. журн., 1956, т. 2, вып. 1, с. 71–83.
106. Рэлей Дж. Теория звука. Пер. с англ./Под ред. С. М. Рытова, т. 1, 2, М., ГИТТЛ, 1955.
107. Рябуха Ю. Н. Пульсирующий цилиндр в оболочке вблизи границы акустического полупространства. — Прикладная механика, 1980, т. 16, № 1, с. 8–14.
108. Свердлин Г. М. Прикладная гидроакустика. Л., Судостроение, 1976.
109. Свердлин Г. М. Гидроакустические преобразователи и антенны. Л., Судостроение, 1980.
110. Сергеев Ю. Д. К определению скорости продольных волн в полом цилиндрическом стержне, сжатом осевым давлением. — Акуст. журн., 1979, т. 25, вып. 3, с. 458–461.
111. Сивухин Д. В. Дифракция плоской звуковой волны на сферической полости. — Акуст. журн., 1955, т. 1, вып. 1, с. 77–88.
112. Скучик Е. Основы акустики. Пер. с нем./Под ред. Ю. М. Сухаревского. М., ИЛ, т. 1, 2, 1958–59.
113. Скучик Е. Основы акустики. Пер. с англ./Под ред. Л. М. Лямшева. М., Мир, т. 1, 2, 1976.
114. Слэтер Дж. Передача ультракоротких радиоволн. Пер. с англ./Под ред. С. Д. Гвоздовер. М.–Л., ГИТТЛ, 1946.
115. Смаришев М. Д. Направленность гидроакустических антенн. Л., Судостроение, 1973.
116. Справочник по гидроакустике./Под ред. А. Е. Колесникова. Л., Судостроение, 1982.
117. Тарасов Л. А., Тютюкин В. В. Метод измерения модулей сдвига и сжатия резины при малых деформациях. — Каучук и резина, 1960, № 9, с. 38–41.
118. Тартаковский Б. Д. К теории распространения плоских волн через однородные слои. — Докл. АН СССР, 1950, т. 71, № 3, с. 465.
119. Тартаковский Б. Д. Звуковые переходные слои. — Доклады АН СССР, 1950, т. 75, № 1, с. 29–32.
120. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. Пер. с англ./Под ред Я. Г. Пановко. М., Физматгиз, 1959.
121. Треолар Л. Физика упругости каучука. Пер. с англ./Под ред. Е. В. Кувшинского. М., ИЛ, 1953.



122. Тюлин В. Н. Введение в теорию излучения и рассеяния звука. М., Наука, 1976.
123. Тютюкин В. В. Распространение упругих волн в среде с цилиндрическими каналами. — Акуст. журн., 1956, т. 2, вып. 3, с. 291–301.
124. Тютюкин В. В. Рассеяние плоских волн цилиндрической полостью в изотропной упругой среде. — Акуст. журн., 1959, т. 5, вып. 1, с. 106–110.
125. Ультразвуковые преобразователи. Пер. с англ./Под ред. И. П. Голяминой. М., Мир, 1972.
126. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Пер. с англ./Под ред. В. Е. Гуля. М., ИЛ, 1963.
127. Физическая акустика. Пер. с англ./Под ред. Л. Д. Розенберга. Т. 1, ч. А. М., Мир, 1966.
128. Фурдуев В. В. Электроакустика. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
129. Фурдуев В. В. Акустические основы вещания. М., Связьиздат, 1960.
130. Харкевич А. А. Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы. Т. 1. М., Наука, 1973.
131. Цвиккер К., Костен К. Звукопоглощающие материалы. Пер. с англ./Под ред. Л. М. Бреховских. М., ИЛ, 1952.
132. Швиданенко А. М. К определению динамических свойств вязкоупругого слоистого материала. — Прикладная механика, 1970, т. 6, № 2, с. 124–126.
133. Швиданенко А. М. Распространение волн в вязкоупругой слоистой среде. — Акуст. журн., 1973, т. 19, вып. 5, с. 791–794.
134. Шейба Л. С., Шляпочников С. А. Собственные колебания упругого слоя с цилиндрическими каналами. VIII Всесоюзная акустическая конференция. — Сб. докладов. М., 1973, секция Л, с. 104–107.
135. Шейба Л. С., Шляпочников С. А. Об одном классе собственных колебаний упругого цилиндра. — Акуст. журн., 1974, т. 20, вып. 2, с. 331–333.
136. Шейба Л. С., Шляпочников С. А. К расчету собственных колебаний резинотехнических изделий. — В сб.: Вопросы динамики и прочности. Рига, Зинатне, 1976, вып. 33, с. 129–133.
137. Шейба Л. С., Шляпочников С. А. Применение метода приближенного разделения переменных к некоторым задачам о колебаниях цилиндров. — Акуст. журн., 1977, т. 23, вып. 1, с. 135–142.
138. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., Судостроение, 1972.
139. Щевьев Ю. П., Чабанов В. Е. Некоторые вопросы диагностики материалов акустическими методами. Л., ЛГУ, 1977.
140. Behrens J. A., Blankenship G. W., Stokes R. H. An Onion-skin Composite as a Transducer Backing Material. — Journ. Acoust. Soc. Amer., 1979, vol. 65, N 6, p. 1562–1567.
141. Bertrand J. C., Young J. W. Multiple Scattering between a Cylinder and a Plane. — Journ. Acoust. Soc. Amer., 1976, vol. 60, N 6, p. 1265–1269.
142. Bodare A. A Calculation of Static and Dynamic Elasticity Constants in an Elastic Inhomogenous Material „Mech. Deform. and Fract. Proc. Int. Conf., Zulea, 1978” Oxford e. a., 1979, p. 293–295.
143. Böcher E. Pressure-release Reflectors for Waterborne Sound at High Hydrostatic Pressures. — Acustica, 1961, vol. 11, N 4, p. 190–197.
144. Davies W. E. Elastic Constants of Two-Phase Composite Material. — Journ. Phys. D. Appl. Phys., 1971, vol. 4, N 8, p. 1176–1181.
145. Dawson J. R., Shortall J. B. The Microstructure of Rigid Polyurethane Foams. — J. Mater. Sci., 1982, vol. 17, N 1, p. 220–224.
146. Franklin R. N., Bryant G. H. Cylindrical Capacitive Obstacles in a Waveguide. — Elect. Quart. IEE, 1963, vol. 12, N 4, p. 1709–1719.
147. Gibe E., Blechschmidt E. Experimentelle und Theoretische Untersuchungen über Dehnung-Seigenfrequenzen von Stäben und Röhren. Ann. Phys., 1933, N 8, p. 417–457.
148. Gonzalez M. A. Analysis of a Composite Compliant Baffle. — Journ. Acoust. Soc. Amer., 1978, vol. 64, N 5, p. 1509–1513.

149. Gonzalez M. A. Comments on „Analysis of a Composite Compliant Baffle”. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1980, vol. 67, N 2, p. 702.
150. Growinski R., Le Tallec P., Ruas De Barros V. Approximate Solution of Nonlinear Problems in Incompressible Finite Elasticity. „Non-linear Finite Elem. Anal. Struct. Mech. Proc. Eur. – U. S. Workshop, Bochum, 1980”. Berlin e. a. 1981, p. 666–695.
151. Haan D. E., Higgs R. W., Ericson L. I. Performance Degradation of Deep-Ocean Transducers Using Onionskin Paper for Acoustic Decoupling. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1972, vol. 51, N 1 (part 2), p. 290–294.
152. Higgs R. W., D'Amico R. M., Speerschneider C. J. The Acoustical and Mechanical Properties of Sonit. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1971, vol. 50, N 3 (part 2), p. 946–954.
153. Higgs R. W., Ericson L. I. Acoustic Decoupling Properties of Onionskin Paper. – Journ. Acoust. Soc. Amer. 1969, vol. 46, N 1 (part 2), p. 211–215.
154. Higgs R. W., Ericson L. I. Acoustic Decoupling Properties of Corprene DC-100. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1969, vol. 46, N 5 (part 2), p. 1254–1258.
155. Huter T. F. Twenty Years in Underwater Acoustic. Generation and Reception. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1972, vol. 51, N 3 (part 2), p. 1025–1040.
156. Junger M. C. Dilatational Waves in an Elastic Solid Containing Lined, Gasfilled Spherical Cavities. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1980, vol. 69, N 6, p. 1571–1576.
157. Lauchle G. L., Barge F. A. Underwater Acoustic Absorption Characteristics of Composites of Wood, Rubber and Steel. – Acustica, 1979, vol. 43, N 1, p. 82–87.
158. Mc Mahon G. W. Performance of Open Ferroelectric Ceramic Cylinders in Underwater Transducers. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1964, vol. 36, N 3, p. 528–533.
159. Maxwell G., Hixson E. Acoustic Radiation from a Long Solid Rod into a Semiinfinite Liquid Medium. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1973, vol. 53, N 1, p. 88–95.
160. Mikeska E. E., Behrem J. A. Evaluation of Transducer Window Materials. – Journ. Acoust. Soc. Amer., 1976, vol. 59, N 6, p. 1294–1298.
161. Nemat-Nasser S., Taya M. On Effective Moduli of an Elastic Body Containing Periodically Distributed Voids. „Quart. Appl. Math.”, 1981, vol. 39, N 1, p. 43–59.
162. Patent FRG N 1572400. Mertens P. Verfahren zur Herstellung von Wasserschallreflektoren.
163. Patent France N 502913. Langevin P., Chilowsky N. C. Procédé et Appareils Pour la Production de Signaux Sousmarins Dirigés et Pour la Localisation a Distance D'obstacles Sousmarins.
164. Patent USA N 3094636. Gauld B. Underwater Transducer.
165. Patent USA N 3241099. Elston A., Vincent G. Pressure Compensated Transducer.
166. Patent USA N 3262093. Junger M., Kleinschmidt K. Pressure Compensated Sonic Transducer.
167. Patent USA N 3277434. Buchanan G. L. Transducer Pressure Release Under High Environmental Pressure.
168. Patent USA N 3277436. Fitzgerald J. W. Hollow Electro-Acoustic Transducer.
169. Patent USA N 3480906. Thompson I. H. Transducer Having a Backing Mass Spaced a Quarter Wavelength Therefrom.
170. Patent USA N 3541502. Behrendt I. W., Hunsaker G. L. Deep Submergence Transducer.
171. Patent USA N 3699507. Massa F. Baffle Structure for Underwater Transducer Array.
172. Patent USA N 3737004. Higgs R. W., Lake O. Composite Acoustic Decoupler.
173. Patent USA N 3845333. Holloway J. W. Alternate Lead/Ceramic Stave Free-Flooded Cylindrical Transducer.
174. Patent USA N 3854116. Toulis W. J. Underwater Sound Detection.

175. Patent USA N 3907062 Brigham G. A., Libuha J. J. Compliant Blanket Acoustic Baffle.

176. Patent USA N 4085400. Cluzel P. H., Quivy M. G. Underwater Piesoelectric Transducer.

177. Patent USA N 4140992. Wardle W. F. Baffled Blanket Acoustic Array.

178. Patent USA N 4164727. Morris R. E. Underwater Acoustic Absorber.

179. Radlinski R. P., Brigham G. A., Libuha J. J. Analysis of Scattering From Large Planar Gratings of Compliant Cylindrical Shells. - Journ. Acoust. Soc. Amer., 1977, vol. 61, N 1, p. 48-59.

180. Radlinski R. P., Meyers T. I. Radiation Patterns and Radiation Impedances of a Pulsating Cylinder Surrounded by a Circular Cage of Parallel Cylindrical Rods. - Journ. Acoust. Soc. Amer., 1974, vol. 56, N 3, p. 842-848.

181. Rajagopal E. S. Compressibility and Sound Velocity in Two Phase Mixtures. - Acustica, 1961, vol. 11, N 3, p. 178-179.

182. Sussman H. On The Use of Unicellular Rubber for Underwater Acoustic Devices. - Journ. Acoust. Soc. Amer., 1957, vol. 29, N 1, p. 145.

183. Toulis W. J. Acoustic Refraction and Scattering with Compliant Element. - Journ. Acoust. Soc. Amer., 1957, vol. 29, N 9, p. 1021-1026.

184. Twersky V. Multiple Scattering of Sound by a Periodic Line of Obstacles. - Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 53, N 1, p. 96-112.

185. Wilkinson J. P. D., Da Costa M. J. Underwater Behavior of Free-Flooded Ceramic Ring Transducers. „Pap. Amer. Soc. Mech. Eng.”, 1970, NWA/De-7p.

---

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

|   |            |
|---|------------|
| Предисловие . . . . .   | 3          |
| Перечень условных обозначений . . . . .   | 5          |
| Введение . . . . .  | 8          |
| <b>Глава 1. Экранирующие свойства плоских слоистых систем . . . . .</b>                                   | <b>11</b>  |
| § 1. Входной импеданс слоя . . . . .  | 11         |
| § 2. Коэффициенты отражения и прохождения . . . . .   | 20         |
| § 3. Коэффициенты передачи . . . . .  | 27         |
| § 4. Акустические характеристики среды, состоящей из чередующихся слоев . . . . .                         | 34         |
| <b>Глава 2. Акустические характеристики радиально возбуждаемого сплошного упругого цилиндра . . . . .</b> | <b>39</b>  |
| § 5. Бесконечный цилиндр и тонкий диск . . . . .  | 41         |
| § 6. Бесконечно длинный цилиндр с внутренним цилиндрическим стержнем . . . . .                            | 43         |
| § 7. Цилиндр конечной высоты . . . . .  | 45         |
| § 8. Цилиндр с механическими потерями . . . . .   | 55         |
| <b>Глава 3. Акустические и упругие параметры сред с полостями. . . . .</b>                                | <b>57</b>  |
| § 9. Упругая среда с цилиндрическими каналами . . . . .   | 58         |
| § 10. Упругая среда со сферическими полостями . . . . .   | 71         |
| § 11. Большие деформации резин с полостями . . . . .  | 73         |
| § 12. Решетки из полостей в упругих средах . . . . .  | 87         |
| <b>Глава 4. Экранирование антенн из стержневых преобразователей . . . . .</b>                             | <b>103</b> |
| § 13. Акустико-механический КПД. . . . .  | 104        |
| § 14. Звуковое давление на оси и тыльный лепесток характеристики направленности . . . . .                 | 108        |
| <b>Глава 5. Экранирование цилиндрических преобразователей. . . . .</b>                                    | <b>112</b> |
| § 15. Внешний цилиндрический экран . . . . .  | 112        |
| § 16. Внешний плоский экран . . . . .   | 120        |
| § 17. Цилиндрический преобразователь, заполненный упругой средой . . . . .                                | 131        |
| Указатель литературы . . . . .  | 137        |

**СЕРИЯ „БИБЛИОТЕКА ИНЖЕНЕРА-ГИДРОАКУСТИКА”**

**Валентин Евгеньевич Глазнов**

**ЭКРАНИРОВАНИЕ  
ГИДРОАКУСТИЧЕСКИХ АНТЕНН**

Заведующий редакцией *А. Д. Старков*  
Редактор *Э. В. Зубкова*  
Художественный редактор *О. П. Андреев*  
Технический редактор *О. Ю. Война*  
Корректоры *С. Н. Маковская, И. М. Савенок*  
ИБ № 1016

Подписано в печать 7.01.86. М-25304. Формат 60 x 90 1/16. Бумага офсетная № 1.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,25. Усл. кр.-отт. 9,5. Уч.-изд. л. 9,8. Изд. № 3946-84.  
Тираж 2900. Заказ № 48 . Цена 50 коп.

Набрано в издательстве „Судостроение” на композере ИБМ 82 оператором  
В. В. Михайловой.

Издательство „Судостроение”, 191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Тульская типография Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Тула, пр. Ленина, 109.

**Издательством „Судостроение“ в серии „Библиотека инженера-гидроакустика“ в 1976–85 гг. выпущены книги**

1. Матвиенко В. Н., Тарасюк Ю. Ф. Дальность действия гидроакустических средств. — Л.: Судостроение, 1976. — 200 с.
2. Голубков А. Г. Гидролокатор дельфина. — Л.: Судостроение, 1977. — 96 с.
3. Жуков В. Б. Расчет гидроакустических антенн по диаграмме направленности. — Л.: Судостроение, 1977. — 184 с.
4. Лаврентьев Э. В., Кузян О. И. Взрывы в море. — Л.: Судостроение, 1977. — 160 с.
5. Простаков А. Л. Электронный ключ к океану. — Л.: Судостроение, 1978. — 192 с.
6. Урик Роберт Дж. Основы гидроакустики/Пер. с англ. — Л.: Судостроение, 1978. — 448 с.
7. Рокотов С. П., Титов М. С. Обработка гидроакустической информации на судовых ЦВМ. — Л.: Судостроение, 1979. — 168 с.
8. Жуков В. Б., Островский Д. Б. Параметрическая надежность гидроакустических антенн. — Л.: Судостроение, 1980. — 192 с.
9. Покровский В. А., Щеглов Г. А. Эксплуатация судовых гидроакустических станций. — Л.: Судостроение, 1980. — 192 с.
10. Евтютов А. П., Митько В. Б. Примеры инженерных расчетов в гидроакустике. — Л.: Судостроение, 1981. — 256 с.
11. Матвиенко В. Н., Тарасюк Ю. Ф. Дальность действия гидроакустических средств. — Л.: Судостроение, 1981. — 208 с.
12. Новиков Б. К., Руденко О. В., Тимошенко В. И. Нелинейная гидроакустика. — Л.: Судостроение, 1981. — 264 с.
13. Системы акустического изображения./Под ред. Г. Уэйда, пер. с англ. В. Г. Прохорова, Ю. Ф. Тарасюка. — Л.: Судостроение, 1981. — 240 с.
14. Митько В. Б., Евтютов А. П., Гущин С. Е. Гидроакустические средства связи и наблюдения. — Л.: Судостроение, 1982. — 200 с.
15. Справочник по гидроакустике/А. П. Евтютов, А. Е. Колесников, А. П. Ляликов, Ю. Ф. Тарасюк и др. — Л.: Судостроение, 1982. — 344 с.
16. Гидроакустические навигационные средства/В. И. Бородин, Г. Е. Смирнов, Н. А. Толстякова, Г. В. Яковлев. — Л.: Судостроение, 1983. — 264 с.
17. Яковлев А. П., Каблов Г. П. Гидролокаторы ближнего действия. — Л.: Судостроение, 1983. — 200 с.
18. Подводные гидроакустические преобразователи. Справочник/Под ред. чл. корр. АН СССР В. В. Богородского. — Л.: Судостроение, 1983. — 248 с.
19. Ольшевский В. В. Статистические методы в гидролокации. — Л.: Судостроение, 1984. — 280 с.
20. Смаришнев М. Д., Добровольский Ю. Ю. Гидроакустические антенны: Справочник по расчету направленных свойств гидроакустических антенн. — Л.: Судостроение, 1984. — 304 с.
21. Болгов В. М., Плахов Д. Д., Яковлев В. Е. Акустические шумы и помехи на судах. Л.: Судостроение. 1984. — 192 с.
22. Акустические подводные низкочастотные излучатели/А. В. Римский-Корсаков, В. С. Ямщиков, В. И. Жулин, В. И. Рохтман. — Л.: Судостроение, 1984. — 184 с.
23. Новиков А. К. Статистические измерения в судовой акустике. — Л.: Судостроение, 1985. — 272 с.
24. Тарасюк Ю. Ф. Гидроакустическое телеуправление. — Л.: Судостроение, 1985. — 200 с.

**В 1986 г. выйдут книги:**

25. Простаков А. Л. Электронный ключ к океану. Изд. 2-е, перер. и доп. 15 л., 6000 экз.
26. Глазанов В. Е. Экранирование гидроакустических антенн. 12 л., 4000 экз.
27. Русин Ю. С. Электропитание гидроакустической аппаратуры. 10 л. 4000 экз.
28. Тимошенко В. И., Кобяков Ю. С., Кудрявцев И. М. Конструирование гидроакустической рыбопоисковой аппаратуры. 18 л., 4000 экз.
29. Самойлов А. Н. Цифровые методы формирования характеристик направленности ГАС.





В научно-техническом аспекте проблема экранирования гидроакустических преобразователей родственна задаче создания экранов для электроакустических преобразователей, применяемых в ультразвуковой технике. Наряду с этим, она примыкает к проблеме звукоизоляции в широком смысле и, в частности, в воде. Специфические особенности, возникающие при экранировании звука в воде, такие как: сравнимость с толщиной слоя длины упругой волны, распространяющейся в материалах, применяемых для экранов; податливость экранирующих материалов под действием гидростатического давления и т. п. — также обуславливают необходимость рассмотрения вопросов экранирования в качестве самостоятельной проблемы.